8 класс

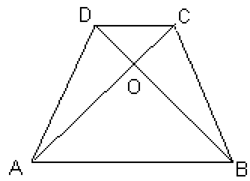
8.1. Петя и Маша пробежали по очереди по два круга на стадионе. Петя бежал оба круга со своей максимальной скоростью и затратил 8 минут. Маша пробежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг бежала со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 12 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Пети и Маши.

Ответ: 4/3. **Решение**. Пусть v (м/мин) – максимальная скорость Пети, u (м/мин) – максимальная скорость Маши, S (м) – длина круговой дорожки. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{2S}{v}=8$ и $\frac{S}{u}+\frac{S}{0{,}8\cdot u}=12$. Отсюда $\frac{S}{v}=4$ и $\frac{S}{u}\left(1+\frac{5}{4}\right)=12$. Разделив эти уравнения, получим $\frac{9}{4}\cdot\frac{v}{u}=3 \Leftrightarrow \frac{v}{u}=\frac{4}{3}$.

8.2. Найдите наибольшее семизначное натуральное число, которое составлено из разных цифр и делится **а)** на 36; **б)** на 72.

Ответ. **а)** 9876420; **б)** 9876312. **Решение**. **а)** См. задачу 7.2. **б)** Рассуждая так же, как при решении задачи 7.2, рассмотрим возможность появления четверки в качестве цифры сотен. Как показано при решении 7.2, для делимости на 4 есть единственная ситуация трех последних цифр – это 420. Но теперь для делимости на 8 необходимо, чтобы число из трех последних цифр делилось на 8 (т.к. 72 = 9·8), а 420 на 8 не делится. Тем самым теперь рассматриваем тройку как кандидата на цифру сотен. Тогда сумма двух последних цифр должна быть равна 3 или 12, и имеется единственная возможность у этих цифр для делимости на 4 – это 12. В этом случае получаем нужный результат, т.к. трехзначное число 312 делится на 8.

8.3. Пусть O – точка пересечения данных отрезков AC и BD. Известно, что у треугольников ABC и ABD периметры совпадают, и у треугольников ACD и BCD периметры совпадают. Найдите длину AO, если длина BO равна 5 см.



Ответ. 5 см. **Решение.** Так как $P_{ABC} = P_{ABD}$, то $AC + BC = AD + BD$ (см. рис.) Аналогично, так как $P_{ACD} = P_{BCD}$, то $AC + AD = BC + BD$. Приведем второе равенство к виду $AC – BC = BD – AD$ и сложим его с первым: $2AC = 2BD$, то есть, $AC = BD$. Тогда из первого уравнения следует, что $AD = BC$, и поэтому $\Delta ADB = \Delta BCA$ (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle ABD = \angle BAC$, то есть, ΔAOB – равнобедренный; $AO = BO =$ 5 см.

8.4. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = y^2 + 2023$ в натуральных числах x, y?

Ответ: 3. **Решение**. Данное уравнение равносильно такому: $(x – y)(x + y) = 2023$. Поскольку 2023 раскладывается на простые множители в виде $2023 = 7\cdot17^2$, то, учитывая, что x и y натуральные и $x – y > 0$ (в силу данного уравнения), получаем три системы уравнений $\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=2023;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=7,\\ x+y=289;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=17,\\ x+y=119\end{cases}$ Каждая из этих систем имеет одно решение в натуральных числах. Укажем эти решения: 1) $x = 1012$, $y = 1011$; 2) $x = 148$, $y = 141$; 3) $x = 68$, $y = 51$.

8.5. На столе лежат 99 монет гербом вверх. За один ход можно выбрать любые 95 монет и перевернуть их. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вниз?

Ответ. 3. **Решение.** Приведем пример на 3 хода. Первым ходом (так же, как в задаче 7.5) получаем 95 минусов и 4 плюса. Следующим ходом переворачиваем монеты с 3-й по 95-ю и две последние, тогда получим $--\underbrace{++\ldots+}_{93}++--$ и последних ходом перевернем все 95 плюсов.

Будем считать, что монеты выложены в ряд. Покажем сначала, что число ходов должно быть нечетным. Для этого представим монеты как числа ±1, а ход заключается в смене знака у пяти чисел, герб соответствует $(+1)$, а перевернутая монета (решка) (-1). Рассмотрим число P, равное произведению чисел на столе. Вначале $P = +1$ и при каждом ходе знак P меняется на противоположный (т.к. меняется знак у пяти сомножителей). В конце должны иметь $P = (-1)^{99} = -1$, но за четное число ходов знак у P не меняется. Далее, очевидно, что за 19 (или менее) ходов можно перевернуть не более $19\cdot5 = 95$ монет. А за 20 ходов, как мы только что доказали, перевернуть все монеты тоже нельзя. Осталось привести пример на 21 ход. За 19 ходов, последовательно переворачивая по 5 монет, получим $\underbrace{--\ldots-}_{95}++++$ (95 минусов и 4 плюса).

Последние 7 монет за два хода переворачиваем так: $\underbrace{---}++\underbrace{++} \Rightarrow \underbrace{+++++}-- \Rightarrow -------$.