ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024/2025 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА
8 КЛАСС

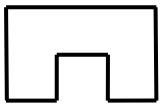
# МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ (КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)

**Максимальное количество баллов – 42 балла**

**Задание 1**

Из прямоугольника с периметром 20 см, а площадью 24 см$^2$, вырезали квадрат так, что у полученной фигурки площадь теперь равна 20 см$^2$, а периметр – 24 см. Покажите, как это можно сделать.

**Решение.** Возьмем прямоугольник 4×6, его периметр равен 20 см, а площадь – 24 см$^2$. После вырезания квадрата площадь уменьшилась на 4 см$^2$, значит вырезали квадрат 2×2. Если квадрат прилегает к стороне прямоугольника (как показано на рисунке), то периметр полученной фигурки будет равен 24 см.



**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Описан прямоугольник, приведен пример правильного вырезания квадрата – **7 баллов.**

В остальных случаях – **0 баллов.**

**Задание 2**

Из 100 лотерейных билетов 14% выигрывают. Петя и Вася скупили всю сотню. Среди Петиных билетов 24% выигрышных, среди Васиных – только 4%. Сколько билетов купил Вася?

**Ответ.** 50

**Решение.** По условию выигрышных билетов 14. Пусть Петя купил $x$ билетов, тогда Вася купил 100–$x$ билетов. Тогда выигрышных билетов у Пети 0,24$x$, у Васи 0,04(100–$x$). Получаем уравнение 0,24$x$+4–0,04$x$=14, откуда $x$=50.

**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Только правильный ответ с проверкой, что он подходит – **1 балл**,

Верно построена математическая модель, но дальнейших продвижений нет или они ошибочны – **3 балла.**

Верно построена математическая модель, но при решении допущена арифметическая ошибка – **6 баллов**.

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

**Задание 3**

Из вершины $C$ треугольника $ABC$ провели высоту $CH$ и биссектрису $CL$. Найдите отношение $CH$:$CL$, если угол $A$ треугольника на 120° больше угла $B$.

**Ответ.** $CH$:$CL$=1:2.

**Решение.** Так как по условию угол $A$ треугольника на 120° больше угла $B$, то треугольник $ABC$ – тупоугольный, а значит высота $CH$ лежит вне треугольника. Пусть $\angle B = x$, тогда $\angle A = 120° + x$, а $\angle C = 60° - 2x$. $CL$ - биссектриса угла $C$, значит $\angle ACL = \angle BCL = 30° - x$. Угол $CLH$ является внешним для треугольника $BCL$, а значит он равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, т.е. $\angle CLH = x + 30° - x = 30°$. Тогда в прямоугольном треугольнике $CLH$ катет $CH$ равен половине гипотенузы $CL$, т.е. $CH$:$CL$=1:2.

**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

Верно найден угол CLH – **3 балла**,

При работе с градусными мерами углов допущена арифметическая ошибка, из-за чего задача не доведена до конца или получен неверный ответ – **не более 2 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов.**

**Задание 4**

Взяли два числа: пятизначное и трёхзначное, в них одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные цифры – разными буквами. Получили КОМОК и ОКО. Известно, что КОМОК делится на 36, а ОКО делится на 4. Найдите исходные числа. *Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

**Ответ.** КОМОК=48384, ОКО=848 или КОМОК=84348, ОКО=484.

**Решение.** Так как КОМОК делится на 36, то это число делится на 4, значит О и К – четные цифры, отличные от нуля (они обе стоят на первом месте). КОМОК и ОКО делятся на 4, тогда двузначные числа ОК и КО также делятся на 4. Рассмотрим все варианты двузначных чисел, составленных из различных четных цифр, не равных нулю и кратных 4: 24, 28, 48, 64, 84. В этом списке имеется только одна пара чисел, которая допускает перестановку цифр: 48 и 84.

Пусть ОК=48, тогда ОКО=484, а КОМОК=84М48, но по условию КОМОК делится 36, а значит, делится на 9. Но тогда сумма цифр 8+4+М+4+8 делится на 9. Это возможно только, если М=3.

Если ОК=84, то ОКО=848, а КОМОК=48М84. Аналогично получаем, что М=3.

**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

Верно сделан вывод, что ОК=48 или 84, но дальнейших продвижений нет или они неверные – **3 балла**.

Верный ответ с проверкой **– 2 балла.** Суммируется с предыдущим пунктом.

Указан только один из двух возможных ответов, подтвержденный проверкой – **1 балл.**

Верно сделан вывод, что цифры О и К – чётные, отличные нуля, но дальнейших продвижений нет – **1 балл.**

**Задание 5**

Петя и Вася ехали на поезде в Омск. Вася лежал на полке, а Петя смотрел в окно. В 8:00 Вася спросил у Пети: «Далеко ли до Омска?» «73 километра», - ответил Петя. На тот же вопрос, заданный в 8:15 и 8:45, Петя ответил: «62 километра» и «37 километров». Известно, что если расстояние составляло не целое число километров, то Петя округлял его до ближайшего целого числа (а если таких было два – то до любого из них по своему выбору). Известно, что скорость поезда была постоянной. Найдите её. *Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

**Ответ.** 48 км/ч.

**Решение.** Поскольку Петя каждый раз округлял до ближайшего целого числа, то в 8:00 расстояние до Омска было не меньше 72,5 км и не больше 73,5 км, в 8:15 – не меньше, чем 61,5 км и не больше, чем 62,5 км, в в 8:45 – не меньше, чем 36,5 км и не больше, чем 37,5 км. Поэтому за 15 минут (с 8:00 до 8:15) поезд проехал не меньше 10 и не больше 12 км, т.е. его скорость была не меньше 40 км/ч и не больше 48 км/ч. А за полчаса (с 8:15 до 8:45) поезд проехал не меньше 24 км и не больше 26 км, т.е. скорость поезда не меньше 48 км/ч и не больше 52 км/ч. Обоим этим условиям удовлетворяет только одно значение скорости – 48 км/ч.

**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

Сделаны **обе** правильные оценки о расстоянии, преодоленном поездом за конкретный промежуток времени, дальнейших продвижений нет – **2 балла.**

Только одна оценка расстояния – **1 балл.**

Получены **обе** правильные оценки для скорости поезда (от 40 до 48 и от 48 до 52), но ответ не предъявлен – **5 баллов**.

Получена только одна из оценок скорости поезда (от 40 до 48) или (от 48 до 52), дальнейших продвижений нет – **3 балла.**

**Задание 6**

Маша записала все натуральные числа от 1 до 1234 в порядке возрастания. Она выбирает два соседних числа и между ними пишет их разность, вычитая из большего числа меньшее, а исходные числа стирает. Если соседние числа равны, то Маша пишет 0, а исходные также стирает. Эта операция повторяется до тех пор, пока на доске не останется одно число. Маша хочет, чтобы это число было наибольшим возможным. Какое число она может получить?

**Ответ.** 1233

**Решение.**

Оценка.

Докажем, что последнее число будет нечётным.

Первый способ.

Сумма всех исходных чисел $1+2+3+\ldots+1234=\frac{(1+1234)\cdot 1234}{2}=1235\cdot 617$ является нечетной. За каждый шаг Маша меняет в этой сумме $a+b$ на $a-b$, т.е. уменьшает на $2b$, а значит, сумма остаётся нечётной.

Второй способ.

Вначале на доске написано 1234:2=617 нечётных чисел. Так как разность нечётного и чётного числа нечётна, а разность двух нечётных чисел – чётна, то при каждой Машиной операции количество нечётных чисел остаётся нечётным. Значит последнее число – нечётное.

При каждой операции Маша вычитает из большего числа меньшее, значит разность неотрицательна. Т.е. последнее число не будет больше самого большого из исходных чисел. Мы доказали, что последнее число будет нечётным, а значит результат не превосходит 1233.

Пример.

Покажем, как получить 1233. Заметим, что из четырёх подряд идущих натуральных чисел можно получить 0: сначала из второго вычесть первое, потом из четвёртого — третье, а потом записать 0 вместо двух получившихся единиц. Теперь разобьём все числа от 2 до 1233 на четвёрки, идущих подряд, превратим все эти четвёрки в нули, а потом уничтожим все эти нули, последовательно вычитая их из 1. После этого вычтем 1 из 1234 и получим 1233.

**Критерии.**

**Всего за задание – 7 баллов**

Предъявлен алгоритм получения числа 1233. Доказано, что это – наибольшее возможное число – **7 баллов.**

Только алгоритм получения числа 1233 – **3 балла**.
Обосновано, что последнее число не превосходит 1233, алгоритм отсутствует – **3 балла**.
Обосновано, что последнее число – нечётное, дальнейшие продвижения отсутствуют – **2 балла.**