

**Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2024-2025 учебном году**

8 класс. Краткие решения.

1. Самолёт вылетел из Перми 28 сентября в полдень и прибыл в Киров в 11 часов утра (везде в задаче время отправления и прибытия указывается местное). В 19 часов того же дня самолёт вылетел из Кирова в Якутск и прибыл туда в 7 часов утра. Через три часа он вылетел из Якутска в Пермь и вернулся туда в 11 часов утра 29 сентября. Сколько времени самолёт находился в воздухе?

Ответ. 12 часов.

Решение.

Самолёт отсутствовал в Перми 23 часа. Из них 8 часов он стоял в Кирове (с 11 до 19 часов) и три часа в Якутске. Итого из этих 23 часов он стоял $8 + 3 = 11$ (часов), т. е. в воздухе самолёт находился $23 - 11 = 12$ (часов).

2. На поляне собрались 25 гномов. Известно, что 1) каждый гном, который надел колпак, надел и обувь; 2) без колпака пришли 12 гномов; 3) босиком пришло 5 гномов. Каких гномов и на сколько больше: тех, кто пришёл в обуви, но без колпака, или тех, кто надел колпак?

Ответ. Тех, кто надел колпак, на 6 больше.

Решение.

Из условия 2 следует, что в колпаке пришли $25 - 12 = 13$ гномов.

Из условия 1 получаем, что ровно 13 гномов пришли и в колпаке, и в обуви. Из условия 3 следует, что всего в обуви пришло $25 - 5 = 20$ гномов.

Значит, $20 - 13 = 7$ гномов пришли в обуви, но без колпака.

Итак, тех, кто надел колпак (13 гномов), больше, чем тех, кто пришёл в обуви, но без колпака (7 гномов), ровно на 6 гномов.

3. Разность квадратов двух чисел равна 6, а если уменьшить каждое из этих чисел на 2, то разность их квадратов станет равна 18. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ. 2.

Решение.

Дано:

$$a^2 - b^2 = 6,$$

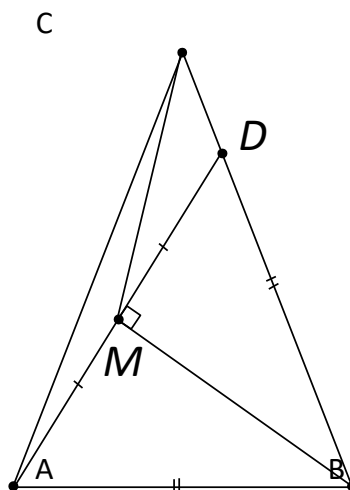
$$(a-2)^2 - (b-2)^2 = 18.$$

$(a-2)^2 - (b-2)^2 = a^2 - 4a + 4 - b^2 + 4b - 4 = a^2 - b^2 - 4(a-b) + 4$. Так как из первого условия $a^2 - b^2 = 6$, получаем, что $6 - 4(a-b) = 18$. Отсюда $a - b = -3$, и из первого уравнения получаем, что $a + b = -2$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB на стороне CB выбрана точка D так, что $CD = AC - AB$. Точка M — середина AD . Докажите, что угол BMC — тупой.

Доказательство.

Так как $CD = AC - AB = BC - AB$, получаем, что $DB = AB$, а значит, треугольник ABD равнобедренный. Тогда его медиана BM является и высотой, т. е. угол BMD прямой. Значит, $\angle BMC = \angle BMD + \angle DMC = 90^\circ + \angle DMC = 90^\circ$ тупой.



5. Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

Решение.

Если периметр прямоугольника не делится на 4, то сумма его сторон не делится на 2. Сумма двух целых чисел не делится на 2, если они разной чётности, т. е. периметр прямоугольника не делится на 4, если одна его сторона чётная, а другая нечётная. Но тогда его площадь должна быть чётной. Однако площадь каждого из составляющих квадрат 2015×2015 прямоугольников чётной быть не может, так как иначе их суммарная площадь была бы тоже чётной, но площадь квадрата 2015×2015 нечётна.