Пермский край
2024-2025 учебный год

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
8 КЛАСС

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий – 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

8.1. На доске написано 4 неотрицательных числа. Маша выбрала 3 из них, их сумма оказалась равна 2. Затем Даша выбрала 3 числа, их сумма оказалась равна 3. Саша тоже выбрала 3 числа, их сумма оказалась равна 4. Затем пришел Андрей и нашел произведение всех четырех чисел, которое оказалось равно 0. Какие числа были написаны на доске?

Ответ: 0, 1, 1, 2 либо 0, 0.5, 1.5, 2.5

Решение 1. Пусть a – число, которое не участвовало в сумме Маши, b – число, не участвовавшее в сумме Даши, c – число, не участвовавшее в сумме Саши (очевидно, что эти числа различны, иначе суммы чисел у девушек получились бы одинаковые).
Обозначим d – оставшееся четвертое число. Тогда b+c+d=2, a+c+d=3, a+b+d=4. Вычитая из третьего равенства второе получаем, что b-c=1, то есть b=c+1. Вычитая из второго равенства первое получаем, что a-b=1, то есть a=b+1=c+2. Из первого равенства находим d=2-b-c=2-c-1-c=1-2c. Итак, наши числа – это c+2, c+1, c, 1-2c.
Произведение чисел равно 0, значит хотя бы одно из них равно 0. Но если c+2=0, то c=-2, а по условию все числа неотрицательные. Если c+1=0, то c=-1, что тоже невозможно. Значит остаются варианты, когда c=0 (тогда остальные числа – это 2, 1, 1), либо 1-2c=0 (тогда c=0.5 и числа на доске – это 2.5, 1.5, 0.5 и 0).

Решение 2. Произведение чисел равно 0, значит хотя бы одно из чисел на доске равно 0. Рассмотрим два случая.
1) Число 0 выбирали все девушки. Тогда каждое из остальных трех чисел участвовало в сумме ровно двух девушек, и сумма их результатов равна удвоенной сумме всех чисел, то есть сумма всех чисел на доске равна (2+3+4)/2 = 4.5. Тогда Маша не выбрала число, равное 4.5-2 = 2.5, Даша не выбрала число, равное 4.5-3=1.5, Саша не выбрала число, равное 4.5-4=0.5. Значит числа на доске – 0, 0.5, 1.5, 2.5.
2) Одна из девушек не выбирала 0. Тогда её сумма равна сумме всех чисел. Однако, поскольку все числа неотрицательные, то сумма 3х чисел не может быть больше суммы всех чисел, значит сумма всех чисел – это результат Саши, равный 4. Тогда Маша не выбрала число, равное 4-2=2, Даша не выбрала число, равное 4-3=1. А поскольку сумма всех чисел равна 4, то оставшееся четвертое число равно 1.

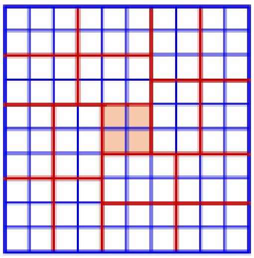
Критерии.
Только ответ, при этом в ответе только один из правильных наборов чисел – 1 балл.
Только ответ, при этом в ответе оба правильных набора – 2 балла.
Наличие или отсутствие пояснений, кто из девушек какие числа выбирал – на оценку не влияет.
Если в ответе присутствуют лишние наборы (например, наборы с отрицательными числами) – оценка снижается на 1 балл.
Составлено уравнение, позволяющее найти искомые числа, но уравнение не решено либо решено с ошибками – 3 балла.

Решение построено на рассмотрении случаев (подобно представленному второму решению), но случаи рассмотрены не все – не более 3 баллов.
Арифметическая ошибка в вычислениях – оценка снижается на 1 балл.

8.2. Квадрат 10×10 разрезали по клеточкам на 17 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Какое наименьшее число квадратов могло оказаться среди этих прямоугольников?

Ответ. Один квадрат.

Решение. Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$ и, значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника $a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 17 прямоугольников должны занимать не менее $17 \cdot 6 = 102$ клеток, в то же время исходный квадрат 10×10 имеет всего 100 клеток. Значит, среди прямоугольников есть хотя бы 1 квадрат. На рисунке приведён пример разрезания квадрата 10×10 на 17 прямоугольников, среди которых квадрат ровно один.



Критерии.
Только ответ – 0 баллов.
Есть пример, как разрезать исходный квадрат, чтобы в результате получился ровно один квадрат – 4 балла.
Доказано, что 0 квадратов получиться не могло – 3 балла.

8.3. В заданном натуральном числе стёрли какую-то одну цифру и получили другое число. Затем из первоначального числа вычли полученное, в результате разность оказалась равной 12345. Найдите заданное натуральное число.

Ответ: 13716.

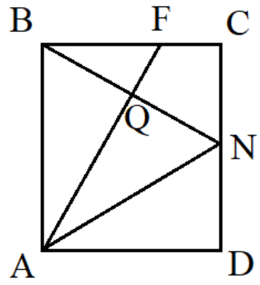
Решение. Если в заданном натуральном числе стерли бы не последнюю цифру, то разность чисел заканчивалась бы нулем, но это не так, поэтому стерта была последняя цифра. Обозначим заданное число x, а полученное после стирания цифры – y. Тогда $x=10y+z$, где z – последняя цифра данного числа. Тогда разность $12345 = x–y = 10y+z–y = 9y+z$. Отсюда $12345–z = 9y$, то есть число $12345–z$ делится нацело на 9. Число 12345 делится на 9 с остатком 6. Поэтому z может принимать только значение 6. Поэтому $9y = 12339$, $y = 1371$, а заданное число $x = 13716$.

Критерии.
Только ответ – 1 балл.
Доказано, что стерта была последняя цифра – 1 балл.

8.4. В прямоугольнике ABCD на сторонах BC и CD взяли точки F и N соответственно. Оказалось, что углы BAF, FAN и NAD равны, и DN = NC. Найдите отношение BF к FC.

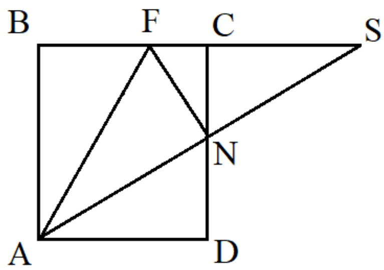
Ответ: 2.

Решение 1. Углы BAF, FAN и NAD равны, а в сумме образуют прямой угол BAD, значит каждый из них равен 30°. Пусть DN=NC=x, тогда AB=CD=2x. В прямоугольном треугольнике NDA против угла 30° лежит половина гипотенузы, поэтому AN=2*DN=2x. Таким образом, треугольник ABN – равнобедренный (AB=AN=2x), а поскольку угол $\angle BAN = 60°$, то и равносторонний, то есть BN=2x. Пусть BN пересекает AF в точке Q. Тогда AQ – это биссектриса в треугольнике ABN, а поскольку он равнобедренный, то она является также медианой и высотой, то есть BQ=QN=1/2BN=x и $BN \perp FQ$.



Прямоугольные треугольники QBF и QNF равны по двум катетам (QF – общая, QB=QN=x), прямоугольные треугольники QNF и CNF равны по катету и гипотенузе (NF – общая, QN=CN=x). Значит треугольники QBF и CNF тоже равны, значит FQ=FC. При этом в прямоугольном треугольнике QBF $\angle FBQ = \angle FBA - \angle QBA = 90° - 60° = 30°$, а значит напротив него лежит половина гипотенузы, то есть BF=2*FQ. Таким образом, BF/FC = 2*FQ/FQ = 2.

Решение 2. Продлим прямую AN до пересечения с прямой BC в точке S. Треугольники ADN и NCS равны по стороне и двум углам, значит AN = NS (и BC = AD = CS). При этом $\angle ASF = 180° - \angle ABC - \angle NAB = 30 = \angle SAF$. Значит FN – медиана равнобедренного треугольника AFS, и $\angle FNS = 90°$. Осталось заметить, что треугольники FNC и FNS прямоугольные с углом в 30 градусов, значит FS = 2NF = 4FC, FC + BC = 4FC, FC + FC + FB = 4FC, BF = 2FC.



Критерии.
Только ответ – 0 баллов.

8.5. Двое игроков, Петя и Ваня, играют в игру. На доске написано число 2024. За один ход разрешается либо уменьшить записанное число на 1, либо уменьшить на 2, либо, если число делится на 3, уменьшить его в 3 раза. То есть, например, из числа 100 за один ход можно получить либо 99, либо 98, а из числа 99 можно получить либо 98, либо 97, либо 33. Игроки ходят по очереди, первым ходит Петя. Выигрывает тот, кто своим ходом смог получить число 0. Кто из игроков может победить независимо от ходов соперника, и как ему для этого нужно действовать?

Ответ: Петя.

Решение. Первым ходом Петя вычитает 1 и получает число 2023. Это число не делится на 3, поэтому Ваня может сделать ход «-1», либо «-2». Петя в ответ ходит так, чтобы после его хода получилось «-3» (то есть на ход «-1» отвечает ходом «-2», а на ход «-2» отвечает ходом «-1»). В результате получается число 2020. Далее Петя продолжает отвечать на ходы Вани аналогично (то есть чтобы в результате двух ходов число уменьшалось на 3). Это возможно, поскольку после хода Пети всегда получается число, не кратное 3. Через 670 пар таких ходов на доске окажется записано число 10. После этого рассмотрим отдельно 2 случая.
1) Если Ваня сходил «-1» и получил число 9, то Петя делит число на 3 и получает 3. Ваня своим ходом может из него получить только 1 или 2, после чего Петя своим ходом выигрывает.
2) Если Ваня сходил «-2» и получил 8, то Петя ходит «-2» и получает 6. Если после этого Ваня делит число на 3 и получает 2, то Петя выигрывает следующим же ходом. Если же

Ваня ходит «-1» или «-2», то Петя дополняет его ход до «-3» (ходом «-2» или «-1» соответственно), в результате получается 3. Из числа 3 Ваня своим ходом может получить только 1 или 2, после чего Петя своим ходом выигрывает.

<u>Критерии.</u>
Только ответ – 0 баллов.
Рассмотрен только один или несколько конкретных сценариев игры (то есть вместо рассмотрения всех возможных ходов Вани рассматривается только один какой-то ход) – 0 баллов.