Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

8.1. *Над трассой от пункта A до пункта B, протяжённостью* 35 *км, летят два квадрокоптера, отправленные из точки A. Скорость первого* 10 *км/ч, второго —* 12 *км/ч. Вдоль трассы установлены столбы (больше одного), над которыми квадрокоптеры зависают на* **целое** *число минут (над каждым столбом на одно и то же), причём второй квадрокоптер зависает на время, вдвое большее, чем первый. К конечной точке B они прилетают одновременно. Сколько столбов могло быть установлено вдоль трассы? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть всего n столбов, а первый квадракоптер зависает на x минут над каждым столбом. Тогда общее время зависания над столбами для первого квадракопетра равно nx минут, для второго — $2nx$ минут. Время пролёта квадракоптерами всей дороги без учёта зависания (в минутах): для первого: $\frac{35}{10} \cdot 60 = 210$, для второго: $\frac{35}{12} \cdot 60 = 175$. По условию

$$210 + nx = 175 + 2nx,$$

откуда $nx = 35$. Все числа в последнем уравнении натуральные, причём $n \neq 1$, поэтому имеем три возможных варианта ответа: $n = 5$, $n = 7$ и $n = 35$.

Ответ: 5, 7 или 35 столбов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верное решение, но не учтено, что случай 1 не удовлетворяет условию (ответ 1, 5, 7, 35)	6 баллов
Верно и обосновано задача сведена к решению уравнения в целых числах	4 балла
Доказано, что второй квадракоптер зависал над столбами на 35 минут дольше, чем первый	3 балла
Обоснованно найден хотя бы один из ответов (5, 7 или 35)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.2. *На даче у Валерия Трифоновича живет* 198 *котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из* 100 *котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из* 100 *котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным.*

Решение: Выберем 99 самых толстых котов. Тогда каждый из них быстрее любого из 99 оставшихся. Действительно, возьмём оставшихся 99 котов и одного из выбранных (любого). В этой сотне выбранный кот самый толстый, значит, и самый быстрый. Теперь добавим к выбранным любого из 99 оставшихся. По доказанному он — самый медленный в получившейся группе, а по выбору первых девяноста девяти — самый худой. Искомые 100 котов найдены.

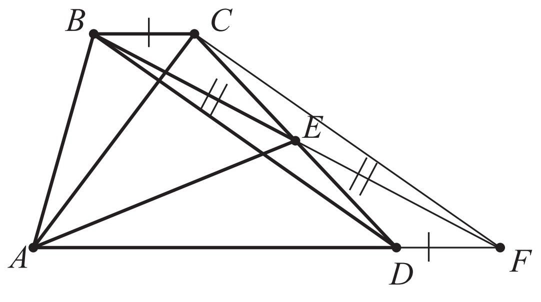
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Приведён верный алгоритм, как выбрать требуемую группу, но не доказано, что этот алгоритм верный	4 балла
Неверные алгоритмы нахождения группы и рассуждения, не приведшие к доказательству утверждения задачи	0 баллов

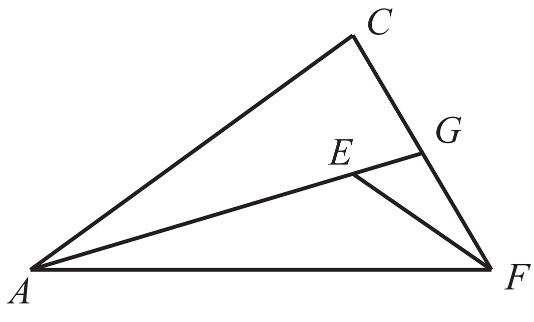
8.3. *Незнайка нарисовал трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и утверждает, что для любой точки E, лежащей на боковой стороне CD имеет место неравенство $BE + AE > AC + BD$. Докажите, что Незнайка неправ.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Покажем, что в случае, когда точка E — середина стороны CD, неравенство, на котором настаивает Незнайка, неверно (вне зависимости от того, что за трапеция нарисована). Для этого на продолжении основания AD за точку D отметим точку F так, что $DF = BC$ (см. рисунок ниже, слева).



К решению задачи 8.3, способ 1, первый шаг



К решению задачи 8.3, способ 1, второй шаг

Четырёхугольник $BCFD$ — параллелограмм (противоположные стороны BC и DF равны и параллельны), поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Это значит, что отрезок BF проходит через точку E и $BE = EF$.

Тогда $AE + BE = AE + EF$. Кроме того, $AC + BD = AC + CF$. Теперь осталось показать, что для любой внутренней точки E треугольника ACF выполнено неравенство $AE+EF < AC+CF$, противоположное озвученному Незнайкой. Это можно сделать по-разному, например, так: продолжим отрезок AE до пересечения со стороной CF в некоторой точке G (см. рисунок выше, справа). Дважды воспользовавшись неравенством треугольника, получим

$$AE + EF < AE + EG + GF = AG + GF < AC + CG + GF = AC + CF,$$

что завершает доказательство.

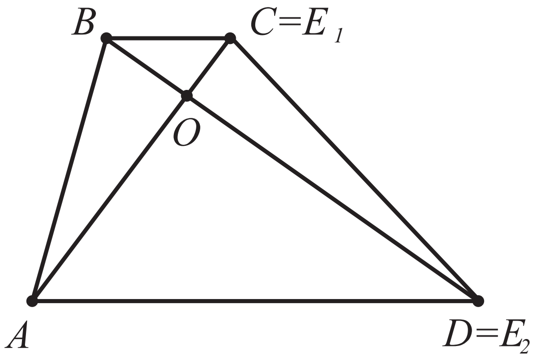
Способ 2. В качестве точки E берем последовательно точки C и D. Если Незнайка прав, то

$$BC + AC > AC + BD \Rightarrow BC > BD, \quad BD + AD > AC + BD \Rightarrow AD > AC.$$

Значит,

$$BC + AD > BD + AC. \tag{*}$$

Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке O (см. рисунок).



К решению задачи 8.3, способ 2

Записывая неравенство треугольника для треугольников BOC и AOD, имеем $BO + OC > BC$ и $AO + OD > AD$. Значит,

$$BD + AC = BO + OC + AO + OD > BC + AD.$$

Противоречие с неравенством (*). Поэтому, Незнайка неправ.

Примечание: Во втором способе решения на самом деле доказано, что неравенство, на котором настаивал Незнайка, не может выполняться одновременно для двух вершин C и D. Но для одной вершины оно вполне может быть выполнено (например, так будет в случае трапеции, у которой диагональ BD перпендикулярна основаниям и меньше их по длине). Таким образом, нельзя утверждать, что для любой точки E стороны AC выполнено неравенство $AE + EB < AC + DB$, противоположное Незнайкиному.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется идея рассмотреть в качестве точки E середину или оба конца боковой стороны	2 балла
Утверждение доказано лишь для некоторых видов трапеций (например, для равнобедренных)	0 баллов

8.4. *Упростите дробь*

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{25}+\sqrt{27}}$$

таким образом, чтобы в итоговом выражении символ квадратного корня встречался только один раз.

Решение:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{25}+\sqrt{27}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(2+3)+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+2)}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

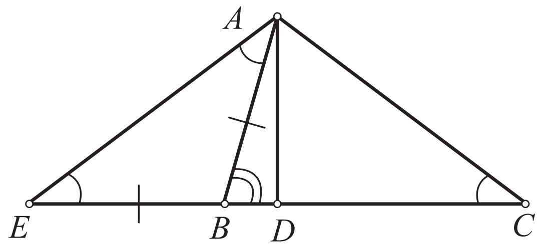
Примечание: В данном задании наличие дробной степени приравнивается к наличию корня, то есть замена, например, $\sqrt{5}$ на число $5^{0,5}$ не изменяет количество радикалов в выражении.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное преобразование, приведшее к выражению, в котором остался только один корень	7 баллов
Все иррациональности представлены в виде произведений корней из чисел 2, 3 и 5	1 балл
Преобразования, не приведшие к уменьшению числа корней в выражении	0 баллов

8.5. *На стороне BC остроугольного треугольника ABC удалось выбрать точку D так, что $AB+BD = DC$. Известно, что угол B в два раза больше угла C. Докажите, что угол ADC равен $90°$.*

Решение: Отложим на продолжении стороны BC за точку B точку E так, что $AB = BE$ — см рисунок.



К решению задачи 8.5

В силу равенства $DC = AB + BD = EB + BD = ED$ получим, что точка D — середина отрезка EC, поэтому в треугольнике EAC отрезок AD является медианой. Далее, треугольник ABE — равнобедренный, поэтому имеем $\angle AEB = \angle EAB$. Но угол ABC — внешний для треугольника ABE, поэтому $\angle ABC = \angle AEB + \angle EAB = 2\angle AEB$. Так как по условию $\angle ABC = 2\angle ACB$, отсюда следует, что $\angle AEB = \angle ACB$, и треугольник EAC равнобедренный, $AE = AC$. В равнобедренном треугольнике AEC медиана AD является высотой, и поэтому $\angle ADC = 90°$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Рассуждения и построения, из которых ход доказательства не виден	0 баллов

8.6. *Есть 4 камня, каждый из которых весит целое число граммов. Есть чашечные весы (без гирь) со стрелкой, показывающей на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. (В частности, если на одной из чаш груза нет, весы показывают массу груза на второй чаше.) Можно ли узнать за 4 взвешивания точный вес каждого из камней, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибаться ровно на один грамм (неизвестно, в какую сторону)? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть веса камней a, b, c, d (в граммах). Первым взвешиванием кладем все четыре камня на левую чашу. Пусть весы показали разность масс между левой и правой чашей, равную m_1 (левая, конечно, перевесит). Тогда $a+b+c+d = m_1$ Следующими тремя взвешиваниями сравниваем веса пар камней. При этом на левой чаше всегда будет камень веса a и один из трёх других, а на правой – два оставшихся. Получим ещё три равенства:

$$
\begin{aligned}
a+b-c-d &= m_2,\\
a+c-b-d &= m_3,\\
a+d-b-c &= m_4.
\end{aligned}
$$

Возможны две ситуации: 1) весы не ошиблись ни разу, то есть все четыре полученных равенства — верные; 2) весы ошиблись ровно один раз, то есть из четырёх уравнений верны три, а в одном уравнении число m_i отличается на от верного на 1.

Покажем, что по результатам взвешиваний (т. е. по числам m_1, m_2, m_3, m_4) мы сможем определить, какая из этих ситуаций имеет место. Заметим, так как все камни весят целое число граммов, все числа m_i тоже будут целыми (но среди них могут быть и отрицательные). При этом, если при i-м взвешивании весы не ошиблись, то число m_i будет той же чётности, что и число $a+b+c+d$ (то есть масса всех камней). А если весы ошиблись при i-м взвешивании, то числа m_i и $a+b+c+d$ будут разной чётности. Поэтому, если все числа m_i одной чётности, то случилась ситуация 1), а если разной — то ситуация 2), при этом, исходя из чётности, мы знаем, в каком из взвешиваний получен неверный результат. Разберём оба случая.

Ситуация 1). Система четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными тогда будет иметь единственное решение, которое легко найти, например, следующим образом. Сложив все четыре уравнения, получим $4a = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, откуда $a = 0{,}25(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$. Теперь по очереди складываем первое уравнение с каждым из трёх других и получаем равенства

$$
\begin{aligned}
2a+2b &= m_1+m_2 &\leftrightarrow\quad b &= 0{,}5(m_1+m_2)-0{,}25(m_1+m_2+m_3+m_4),\\
2a+2c &= m_1+m_3 &\leftrightarrow\quad c &= 0{,}5(m_1+m_3)-0{,}25(m_1+m_2+m_3+m_4),\\
2a+2d &= m_1+m_4 &\leftrightarrow\quad d &= 0{,}5(m_1+m_4)-0{,}25(m_1+m_2+m_3+m_4).
\end{aligned}
$$

Ситуация 2). Пусть число m_i одной чётности (неверный результат взвешивания), а остальные числа m_j $(i \neq j)$ — другой (три верных результата взвешивания). При этом верный результат при i-м взвешивании либо на 1 больше, либо на 1 меньше того, который показали весы. Если бы все взвешивания были верными, то сумма $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ равнялась бы $4a$ (см. ситуацию 1)), т. е. была бы кратна числу 4. В ситуации 2) она реально отличается ровно на 1. Значит, если число $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ при делении на 4 даёт в остатке 1, то весы при неверном взвешивании показали перевес левой чаши, а если в остатке получится 3, то перевес будет у правой чаши (что равносильно недовесу у левой). Таким образом, мы знаем, что в первом случае весы при неверном взвешивании показывают вес на 1 грамм больше, а во втором — на 1 грамм меньше. В системе из четырёх уравнений в одном (i-м) уравнении исправим неверный результат на 1 в нужную сторону. И получим верную систему из четырёх уравнений, которая решается способом, описанном в ситуации 1).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён верный алгоритм и показано, как по результатам взвешиваний определить, ошиблись ли весы и, если ошиблись, то в каком взвешивании это произошло	4 балла
Приведена решающая задачу последовательность взвешиваний и объяснено, как находить веса камней, если весы не солгали	3 балла
Верно составлена система четырёх уравнений, соответствующая верному алгоритму взвешиваний	2 балла
Неверный ответ и/или неверные алгоритмы взвешиваний	0 баллов