

8 класс

1. В магазине продают фломастеры. Если вы покупаете меньше 100 фломастеров, то стоимость одного фломастера будет 65 рублей, а если купить фломастеров 100 или больше, то стоимость одного фломастера будет 57 рублей. Например, выгоднее купить 100 фломастеров по 57 рублей, чем 99 фломастеров по 65 рублей. При каком *наименьшем* числе x покупка 100 фломастеров выгоднее, чем покупка x фломастеров по 65 рублей?

Ответ: 88 фломастеров.

Решение. Плата за фломастеры уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число покупаемых фломастеров до 100. Покупка при этом будет стоить $57 \cdot 100 = 5700$ рублей. Обозначим требуемое число фломастеров через x . Тогда x — *наименьшее* натуральное число, для которого верно неравенство $65 \cdot x > 5700$, откуда $x = 88$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Подбором установлено, что покупка 100 фломастеров по 57 рублей выгоднее покупки 88 фломастеров по 65 рублей, — 7 баллов. Решение с арифметическими ошибками — не более 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Вася написал 2024-значное натуральное число. Каждое двузначное число, образованное соседними (слева направо) цифрами этого числа, делится на 19 или на 21. Последняя цифра написанного числа 7. Какая цифра первая?

Ответ: первая цифра 3.

Решение. Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 19 или на 21. Это 19, 38, 57, 76, 95, 21, 42, 63, 84. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно. Последняя цифра 7, значит, соответствующее двузначное число 57, то есть предыдущая цифра в числе 5. Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 95, следовательно, перед ней стоит цифра 9. Рассуждая аналогично, получим ряд из нескольких последних цифр числа: ...957638421957. Набор 638421957 из 9 цифр будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 2024, из которых период из 9 цифр встречается 224 раза, и ещё 8 первых (слева) цифр — последние 8 цифр периода. Таким образом, первая цифра искомого числа 3.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечено, что в числе Васи есть повторяющийся набор (период) из 9 цифр — 3 балла. Доказано, что период повторяется 224 раза — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Группа школьников покупает билеты в театр и кино. Имеющихся денег достаточно для покупки 3 билетов в театр и 7 билетов в кино, но не хватает на покупку 7 билетов в театр и 1 билета в кино. Хватит ли денег на покупку 11 билетов в кино?

Ответ: хватит.

Решение. Обозначим стоимость билета в театр через t , а в кино — через k . Тогда имеем из условия

$$3t + 7k < 7t + k \iff 6k < 4t \iff k < \frac{2}{3}t \iff 4k < \frac{8}{3}t < 3t.$$

Отсюда $11k = 7k + 4k < 7k + 3t$, то есть стоимость 11 билетов в кино меньше стоимости 7 билетов в кино и 3 билетов в театр. Значит, имеющихся денег хватит на покупку 11 билетов в кино.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Доказано, что $6k < 4t$ — 1 балл. Обосновано неравенство $4k < 3t$ — ещё 3 балла. Доказано, что $11k < 7k + 3t$, но сделан вывод, что денег не хватит — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира гроссмейстер О. Бендер устроил сеанс одновременной игры для *некоторых* шахматистов турнира. В результате всего было сыграно 80 партий. Сколько было шахматистов на турнире и сколько шахматистов участвовало в сеансе одновременной игры?

Ответ: 13 шахматистов, из них в сеансе одновременной игры участвовали двое.

Решение. Пусть n — количество шахматистов в турнире, тогда между собой они сыграли $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. Действительно, каждый из них сыграл $(n-1)$ партий, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчёта мы каждую партию посчитали дважды — за одного участника и за другого. Так как было сыграно 80 партий, то $\frac{1}{2} \cdot n(n-1) \leq 80$. Наибольшее n , при котором выполняется это неравенство, равно 13, так как $\frac{1}{2} \cdot 13(13-1) = 78$; в этом случае О. Бендер сыграл $80 - 78 = 2$ партии, то есть он устроил сеанс с двумя шахматистами. Меньше 13 шахматистов быть не может: если их меньше 13, то между собой они сыграют не больше чем $\frac{1}{2} \cdot 12(12-1) = 66$ партий, и О. Бендер должен сыграть не менее чем с $80 - 66 = 14$ шахматистами, а их не более 12.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что шахматистов не более, чем 13 — 2 балла. Доказано, что шахматистов не менее 13 — ещё 3 балла. Доказано, что в сеансе участвовали 2 шахматиста — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов. Решение с неправильным пониманием условия «Сеанс одновременной игры» — не более 6 баллов. За отсутствие доказательства формулы $\frac{1}{2}n(n-1)$ для подсчёта числа турнирных партий баллы не снижаются.

5. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны и $AB = BC = CD$. Точка N — середина диагонали BD , CH — высота трапеции. Докажите, что прямые HN и AC перпендикулярны.

Первое решение. (Рис. 1.) Пусть K — точка пересечения CN и AD . В равнобедренном треугольнике BCD медиана CN является высотой, то есть $CN \perp BD$. Прямоугольные треугольники CNB и KND равны ($BN = ND$, $\angle CBN = \angle KDN$), поэтому $CN = NK$, то есть HN — медиана в прямоугольном треугольнике KHC . Значит, $HN = KN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH = \angle KCH$.

В прямоугольном треугольнике KND : $\angle KCH = 90^\circ - \angle NKH = \angle NDK$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $\angle NDK = \angle BDA = \angle CAH = 90^\circ - \angle MCH$, поэтому $\angle NHC + \angle MCH = 90^\circ$.

Значит, треугольник CMH — прямоугольный, $\angle CMH = 90^\circ$.

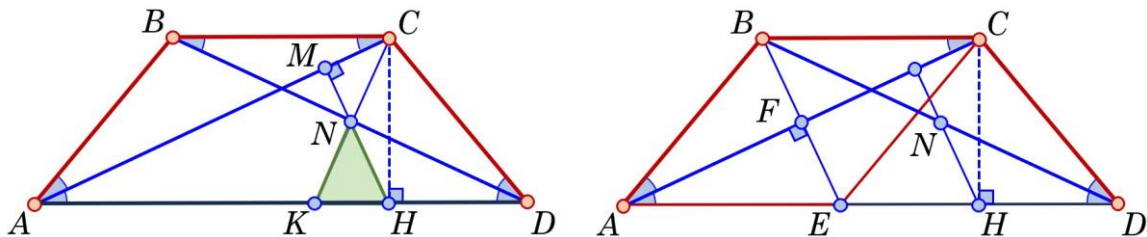


Рис. 1 Рис. 2

Второе решение. (Рис. 2.) Пусть F — середина диагонали AC , прямая BF пересекает основание AD в точке E . В равнобедренном треугольнике ABC медиана BF будет и высотой, поэтому $BF \perp AC$. Значит, в треугольнике ABE отрезок AF является биссектрисой и высотой. В четырёхугольнике $ABCE$ диагонали AC и BE взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, следовательно, $ABCE$ — ромб и $AB =$

$CE = CD$. Треугольник ECD — равнобедренный, поэтому H — середина ED . Тогда $HN \parallel BE$, так как HN — средняя линия в треугольнике BDE . Учитывая, что $BE \perp AC$, получим, что $HN \perp AC$.

Замечание. Для случая, когда BC — бо́льшее основание, доказательство аналогично.

Критерии. *Первое решение.* Доказано, что отрезок HN — медиана в треугольнике KHC — 2 балла. Доказано равенство $\angle KCH = \angle CАН$ или аналогичное ему — 4 балла.

Второе решение. Доказано, что AF — биссектриса и высота в треугольнике ABE — 2 балла. Доказано, что $ABCE$ — ромб — 3 балла, треугольник ECD — равнобедренный — 4 балла.