

**Ключи к заданиям муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников
2024/2025 учебного года
по математике
8 класс**

**Методические рекомендации
для жюри муниципального этапа олимпиады
по оцениванию работ участников**

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
2. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
3. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.
4. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

8.1 Найдите наименьшее четырёхзначное число, такое, что произведение цифр, увеличенных на 1, равно 45.

Ответ: 2024.

Решение. $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ или $45 = 5 \cdot 9$. Значит, в произведении могут встречаться только цифры 1, 5 и два раза 3, или 5, 9 и два раза 1. Поэтому в исходном числе были цифры 0, 4 и два раза 2, или 4, 8 и два раза 0. Так как число не может начинаться с нуля, то, чтобы быть минимальным, оно должно начинаться с 2. Следовательно, из чисел 2204, 2240, 2402, 2420, 2024, 2042 наименьшим является 2024. $\square$

8.2 Несколько мальчиков пошли в лес за грибами. Один из них нашел 6 грибов, а остальные по 13. В другой раз за грибами отправилось другое число мальчиков. Один из них нашел 5 грибов, а все остальные по 10. Сколько мальчиков собирали грибы в первый и во второй раз, если известно, что в обоих случаях было собрано одинаковое число грибов, причем это число больше 100, но не превышает 200?

Ответ: в первый раз мальчиков было 14, а во второй — 19.

Решение. Пусть в первый раз было $n + 1$ мальчиков, во второй — $m + 1$. Они собрали соответственно $6 + 13n$ и $5 + 10m$ штук грибов. При этом, согласно условию задачи:

$$100 < 6 + 13n = 5 + 10m < 200.$$

Отсюда имеем уравнение:

$$13n + 1 = 10m,$$

с ограничениями:

$$7 < n < 15, \quad 9 < m < 20.$$

В интервале $7 < n < 15$ имеется единственное значение n , при котором $13n + 1$ делится на 10. Это значение $n = 13$. Таким образом, $m = 18$.

Следовательно, в первый раз мальчиков было 14, а во второй — 19. $\square$

8.3 Про числа a , b , c и d известно, что $a + b = c + d$ и $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Докажите, что

$$a^{2025} + b^{2025} = c^{2025} + d^{2025}.$$

Решение. Из второго равенства имеем $a^2 - c^2 = d^2 - b^2$, откуда $(a - c)(a + c) = (d - b)(d + b)$. Из первого равенства имеем $a - c = d - b$. Рассмотрим два случая.

1) Если $a - c = d - b = 0$, то $a = c$ и $b = d$, и утверждение задачи очевидно.

2) Если $a - c = d - b \neq 0$, то $a + c = d + b$. Складывая эти равенства получим $a = d$ и $b = c$. В этом случае утверждение задачи также выполнено. $\square$

8.4 Квадратная таблица 10×10 заполнена различными натуральными числами от 1 до 100 по порядку так: слева направо первая строка 1, 2, 3, ..., 10, вторая строка 11, 12, 13, ..., 20 и так далее. Затем часть чисел стерли таким образом, что во всех строках и столбцах таблицы осталось ровно по 5 чисел. Найдите сумму оставшихся чисел.

Ответ: 2525.

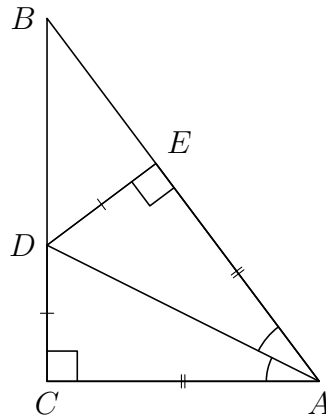
Решение. Каждое число в таблице представим в виде суммы числа единиц и числа десятков, например, $65 = 60 + 5$. В последнем столбце представим по особому правилу: второе

слагаемое (число единиц) сделаем равным не 0, а 10, например, $70 = 60 + 10$. Тогда первые слагаемые будут одинаковы в каждой строке, а вторые в каждом столбце. Подсчитывая суммы оставшихся чисел, будем отдельно суммировать первые и вторые слагаемые. Так как в каждой строке осталось по 5 чисел, то каждое число десятков встретится по 5 раз, и их общее число равно $5(0 + 10 + 20 + \dots + 90)$. Так как в каждом столбце осталось по 5 чисел, то каждое число единиц встретится по 5 раз, и их общее число равно $5(1 + 2 + 3 + \dots + 10)$. Сложив эти числа, получим искомый ответ. $\square$

8.5 В треугольнике ABC угол C равен 90° . Биссектриса AD делит катет BC на отрезки $CD = 3$, $DB = 5$. Найдите гипотенузу AB .

Ответ: 10.

Решение. Опустим перпендикуляр DE на гипотенузу AB .



Прямоугольные треугольники ACD и AED равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AE = AC$, $DE = DC = 4$. Из прямоугольного треугольника BED по теореме Пифагора находим $BE = 4$.

Обозначим $AE = AC = x$. Тогда из треугольника ABC :

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8^2.$$

Решая данное уравнение находим $x = 6$. Тогда $AC = AE + EB = 6 + 4 = 10$. $\square$