

8 класс

1. На викторине было предложено 20 вопросов. За верный ответ начислялось 12 очков, за неверный — списывалось 10 очков. Петя Иванов дал ответы на все вопросы и получил 86 очков. Сколько раз он ошибся?

Ответ: 7 раз.

Решение (первый способ). Пусть Петя ошибся x раз. Тогда он получил $86 = 12 \cdot (20 - x) - 10x$ очков. Решая полученное уравнение, получаем ответ.

Решение (второй способ). Ответив на все вопросы верно, Петя получил бы 240 очков. На каждом неверном ответе он терял 22 очка из этих 240 (10 очков, не полученных за верный ответ, и 12 очков штрафа). Поскольку всего он потерял $240 - 86 = 154$ очка, он ошибся $154 : 22 = 7$ раз.

Критерии оценки.

- 1) Приведён правильный ответ без обоснования — 0 баллов.
 - 2) Если приведен неверный ответ из-за арифметической ошибки, но идея решения правильная – не более 4 баллов.
2. Верно ли, что:
- а) существует четырёхугольник, который можно двумя прямыми рассечь на 6 кусков;
 - б) куб со стороной 3 см нельзя распилить на кубики со стороной 1 см меньше, чем шестью распилами?

Если верно, то объясните почему.

Ответ: а), б) — верно.

Решение. а) Так можно рассечь любой невыпуклый четырехугольник (см. рис. 3).

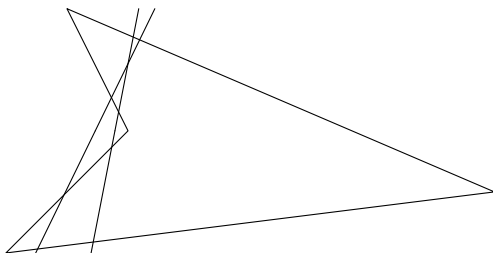


Рис. 3

б) Среди 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$, на которые нужно распилить исходный куб, есть центральный, у которого нет «готовых» граней, лежащих на поверхности исходного куба. Все его грани необходимо выпилить, и одним распилом можно выделить только одну из них. Поэтому распилов потребуется не меньше шести.

Критерии оценки.

- 1) Ответ без примера и без обоснования оценивается в 0 баллов.
 - 2) Пример в п. а) оценивается в 3 балла.
 - 3) Обоснование п. б) – 4 балла.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE . Известно, что $BD = BC$, а $CE = EA$. Найдите углы треугольника ABC .

Ответ: $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = \angle C = 72^\circ$.

Решение. Из $BD = BC$ получаем $\angle B = 2\angle DBC = 2(180^\circ - 2\angle C)$, а из $CE = EA$ — $\angle A = \angle ECA = \angle C/2$. По теореме о сумме углов треугольника

$$180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C = \angle C/2 + 2(180^\circ - 2\angle C) + \angle C = 360^\circ - 5\angle C/2,$$

откуда $\angle C = 72^\circ$. Найдя теперь углы A и B , получаем ответ.

Критерии оценки.

- 1) Приведён правильный ответ без решения — 0 баллов.
4. Натуральное число k записывается с помощью только нулей, единиц и двоек, причём единиц в его записи на одну больше, чем двоек. Докажите, что число $k + 2$ делится на 3.

Решение. Пусть в записи числа k имеется n единиц. Тогда там $n - 1$ двойка, и сумма цифр числа равна $n + 2(n - 1) = 3n - 2$. Так как прибавление к нему двойки не приведёт к переносу в разряд десятков, сумма цифр числа $k + 2$ равна $3n$. Осталось применить признак делимости на 3.

Критерии оценки.

- 1) Рассмотрены только частные случаи или приведены конкретные примеры – 1 балл.
5. В волейбольном турнире участвуют 10 команд, каждая играет с каждой один раз. За победу даётся 2 очка, за поражение — 0, ничьих в волейболе не бывает. Может ли случиться, что в итоге турнира какие-то четыре команды в совокупности наберут на 8 очков больше, чем остальные шесть?

Ответ: не может.

Решение. 10 команд сыграют в турнире $10 \cdot 9/2 = 45$ игр. Всего в них разыгрывается $45 \cdot 2 = 90$ очков. Если какие-то четыре команды набрали вместе x очков, а шесть остальных — $x - 8$ очков, то $2x - 8 = 90$ и $x = 49$. Но любая сумма очков в волейболе — чётное число, так что описанная ситуация невозможна.

Критерии оценки.

- 1) Ответ без обоснования – 0 баллов.
- 2) Решение в частном случае — 1 балл.