

8.1. Ответ: 5

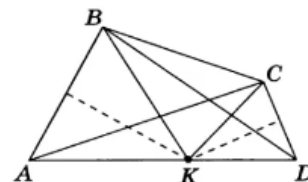
Решение. Пусть a и b – данные числа, $a + b = 2$, $a^2 + b^2 = 3$. Тогда $ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = \frac{1}{2}(4 - 3) = \frac{1}{2}$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 2\left(3 - \frac{1}{2}\right) = 5$.

8.2. Ответ: не могли

Решение. Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, ..., 9, 10, 2024. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55, т.е. после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, будет нечетной. Однако сумма $2 + 3 + \dots + 10 + 2024 = 2078$ четна – противоречие.

8.3. Решение.

Пусть K – точка пересечения серединных перпендикуляров. Тогда $AK = KB$, $CK = KD$ и $\angle KBA = \angle BAK = \angle KDC = \angle KCD$. Отсюда $\angle AKB = \angle CKD$, значит, $\angle AKC = \angle BKD$. Но тогда $\triangle AKC = \triangle BKD$ (по двум сторонам и углу между ними) и $BD = AC$ (как стороны равных треугольников).

**8.4. Ответ: $33\frac{1}{3}\%$.**

Решение. Пусть всего в школе m мальчиков и n девочек. Заметим, что число мальчиков, сидящих с девочками, равно числу девочек, сидящих с мальчиками, т.е. число $0,4m$ ($100\% - 60\% = 40\%$ от числа m) равно $0,8n$ ($100\% - 20\% = 80\%$ от n). Поэтому $m = 2n$, и девочки составляют $\frac{n}{m+n} \cdot 100\% = \frac{n}{2n+n} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$ учащихся.

8.5. Решение. Поступим следующим образом. Пронумеруем все четыре монеты. На одну чашу весов кладем монеты 1 и 2, на другую – монету 3 и гирю. Тогда возможны три варианта.

- 1) Весы находятся в равновесии, тогда фальшивая монета – 4 и вторым взвешиванием можно определить, тяжелее или легче она настоящей, сравнив ее с гирей.
- 2) Весы не в равновесии, при этом тяжелее чаша с гирей. Тогда фальшивая монета на весах, а монета 4 – не фальшивая. При этом если это монета 3, то она тяжелее настоящей, а если это монета 1 или 2, то она легче настоящей. При втором взвешивании на одну чашу весов кладем монеты 1 и 3, а на другую – 4 и гирю. Тогда возможны такие три варианта.
 - А) Весы в равновесии, поэтому монеты 1 и 3 настоящие, а фальшивая монета 2, и она легче настоящей монеты.
 - Б) Перевесила чаша с монетами 1 и 3. Тогда фальшивая монета 3 и она тяжелее настоящей монеты.
 - В) Перевесила чаша с монетой 4 и гирей. Тогда фальшивая монета 1 и она легче настоящей монеты.
- 3) Весы не в равновесии, при этом легче чаша с гирей. Тогда фальшивая монета на весах, а монета 4 – не фальшивая. При этом, если это монета 3, то она легче

настоящей, а если это монета 1 или 2, то она тяжелее настоящей. При втором взвешивании на одну чашу весов кладем монеты 1 и 3, а на другую – 4 и гирю. Тогда возможны такие три варианта.

А) Весы в равновесии, поэтому монеты 1 и 3 настоящие, а фальшивая монета 2, и она тяжелее настоящей монеты.

Б) Перевесила чаша с монетами 1 и 3. Тогда фальшивая монета 1 и она тяжелее настоящей монеты.

В) Перевесила чаша с монетой 4 и гирей. Тогда фальшивая монета 3 и она легче настоящей монеты