Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2024 – 2025 учебный год

8 класс (решения)

1. Вокруг круглого стола сидят рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (они всегда лгут). Известно, что среди присутствующих есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: "Человек, сидящий через одного от меня слева - рыцарь". Возможно ли, что всего за столом сидят

- (а) а) 2024 человека?
(б) б) 2025 человек?

Ответ: (а) да, возможно; (б) нет, невозможно.

Решение: Пронумеруем места так, что на месте номер 1 сидит рыцарь. Тогда на месте номер 3 и на всех следующих местах с нечётными номерами находятся рыцари. Поскольку среди присутствующих есть и лжецы, то найдётся место с чётным номером, занятое лжецом. Отсюда следует, что лжецы сидят также на всех чётных местах. В случае 2024 такое размещение возможно, то есть за столом находятся 1012 рыцарей (на нечётных местах) и 1012 лжецов (они занимают все чётные места. Если же всего за столом 2025 человек, второе место, занятое лжецом, окажется через один слева от 2025-го места, занятого рыцарем. Полученное противоречие доказывает, что в этом случае условие не может быть выполнено.

2. Даны 111 натуральных чисел, каждое из них имеет в десятичной записи 13 единиц, 23 двойки и некоторое количество нулей. Докажите, что эти числа нельзя так разбить на две группы, чтобы произведение всех чисел первой группы равнялось произведению всех чисел второй группы.

Решение: Каждое из данных чисел имеет остаток 2 при делении на 3. Если разбить 11 чисел на две группы, то в одной (скажем, в первой) из групп окажется чётное количество чисел, а в другой нечётное. При перемножении чисел остатки перемножаются, поэтому произведение всех чисел первой группы будет иметь остаток 1 при делении на 3, в то время как произведение всех чисел второй группы будет иметь остаток 2. Значит, произведения не могут быть равными.

3. Может ли число $(a^3 - 1)^2 + (a^3 - 2)^2 + (a^3 - 3)^2$ при каком-нибудь a быть меньше 1,8?

Ответ: нет.

Решение: Обозначим a^3 через x . Выражение $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 3x^2 - 12x + 14$ — квадратный трехчлен. Выделим полный квадрат: $3(x - 2)^2 + 2$. Наименьшее значение он принимает в точке $x = 2$, и это значение равно 2. Значит, данное выражение не может быть меньше 1,8.

4. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

Ответ: 45° , 45° , 90° .

Решение. Так как перпендикуляр меньше наклонной, то любая высота треугольника не больше стороны, на которую она НЕ опущена. Пусть $h_a \geq a$, $h_b \geq b$. Можно считать, что $a \leq b$. Значит, $h_b \geq a$, поэтому $h_b = a$ и $a = h_b \geq b$. Вывод: треугольник прямоугольный и равнобедренный, его углы равны 45° , 45° , 90° .

5. В ряд выложены в произвольном порядке 50 красных и 50 синих шаров. Докажите, что можно убрать половину красных и половину синих шаров так, что среди оставшихся никакой синий не лежит между красными, и никакой красный не лежит между синими.

Решение: Поставим перегородку так, чтобы слева и справа от неё было по 50 шаров. Если слева оказалось по 25 шаров каждого цвета, то, значит, и справа от перегородки лежит 25 синих и 25 красных. Тогда уберём все синие слева от перегородки и все красные справа от перегородки. В результате слева останутся только красные, а справа только синие. Пусть теперь слева от перегородки синих больше, чем красных: n синих и $50 - n$ красных, причём $n > 25$, тогда справа лежат $50 - n$ синих и n красных. Уберём все красные слева от перегородки и все синие справа от перегородки. Теперь слева лежат только синие, а справа только красные, и тех и других по n штук. Осталось убрать ещё произвольные $n - 25$ синих и $n - 25$ красных.