ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
возрастная группа (8 класс)

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.
Максимальная оценка – 35 баллов.

ЗАДАНИЯ

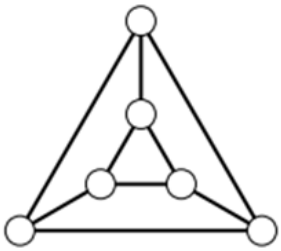
Задание 1.
Придумайте шестизначное натуральное число, которое делится на 9 и обладает следующим свойством: у любой из его цифр кроме крайних одна из соседних цифр больше другой на 5.

Задание 1.
Правильный ответ.
Например, число 722772 или 272727.
Решение.
Произвольное.
Оценка задания.
Любой верный ответ с проверкой делимости на 9 – 7 баллов. Верный ответ без проверки делимости на 9 – 5 баллов, в остальных случаях – 0 баллов.

Задание 2.
В треугольнике ABC проведена медиана BM. При этом угол ABM=40º, угол CBM=70º. Докажите, что AB=2BM.

Правильный ответ.
Приведено верное доказательство.
Решение.
Продолжим медиану BM и отложим отрезок MK=BM. Тогда треугольник AMK равен треугольнику BMC по двум сторонам и углу между ними, угол CBM равен углу MKA и равен 70º. В треугольнике ABK угол BAK=180º–40º–-70º=70º, значит AB=BK=2BM
Оценка задания.
Верное решение – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов.

Задание 3.
На рисунке некоторые кружки соединены между собой. Можно ли в каждый из 6 кружков вписать натуральное число так, чтобы в каждой паре кружков, соединённых отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединённых парах такого не было?



Ответ: Нет, нельзя.
Решение.

Предположим, что это возможно. Выберем из трёх внешних кружков тот, в котором написано самое маленькое число. Пусть, например, это кружок номер 1 (см. рисунок). Будем рисовать стрелку от одного кружка к другому, если число во втором кружке делится на число в первом кружке.

Тогда от кружка номер 1 идут стрелки к кружкам номер 2 и 3, так как числа в них не меньше, чем в кружке номер 1. Получается, что от кружка номер 2 не может идти стрелка к кружку номер 5, потому что иначе число, написанное в кружке 5, будет делиться на число в кружке 1, а так не должно быть; значит, стрелка идёт от 5 к 2. Аналогично, стрелка идёт от 6 к 3. Но тогда мы не можем никуда направить стрелку между 5 и 6: если она идёт от 5 к 6, то число в кружке 3 делится на число в кружке 5, а так не должно быть, а если наоборот, то число в кружке 2 делится на число в кружке 6 – тоже противоречие.
Оценка задания.
Дан верный ответ и приведено его полное обоснование – 7 баллов. Дан верный ответ и приведено частичное обоснование – 3 балла. Неверное решение задачи или ответ без обоснования – 0 баллов.

Задание 4.
Мальчик разрезал выпуклый бумажный 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом разрезал один из двух получившихся многоугольников, затем – один из трёх получившихся, и так далее. В итоге у него получилось восемь n-угольников. Найдите все возможные значения n.

Правильный ответ.
$n=11$.
Решение.
Прямолинейный разрез бывает трёх видов: от стороны к стороне, от вершины к стороне и от вершины до вершины. Значит, после одного разреза суммарное количество сторон многоугольников увеличивается на 4, 3 или 2 соответственно. Мальчик сделал 7 разрезов, поэтому добавилось не меньше, чем 14, и не больше чем 28 сторон. Следовательно, у восьми n-угольников в сумме от 81 до 95 сторон. Из целых чисел этого отрезка только число 88 делится на 8 без остатка, поэтому $n=88:8=11$
Оценка задания.
Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов.
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, не объяснено как меняется суммарное количество сторон в каждом из трёх случаев) – 5 баллов.
Верный ответ получен, но рассмотрены не все случаи или приведён верный ответ и только проверено, что условию он удовлетворяет, но никак не доказано отсутствие других ответов – 3 балла.
Приведён только ответ или задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

Задание 5.
В городе проходил турнир по игре в вышибалы. В каждой игре сталкивались две команды. За победу назначалось 15 очков, за ничью 11, а за проигрыш очков не давали. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. По окончанию турнира оказалось, что суммарное количество набранных баллов равно 1151. Сколько было команд?

Правильный ответ.
12 команд.
Решение.

Пусть участвовало N команд. Тогда игр было N(N-1)/2. За каждую игру суммарно зарабатывается 15 или 22 очка. Поэтому игр было не меньше 53 (1151/22) и не больше 76 (1151/15). Заметим, что если команд было бы не больше 10, то игр было бы не более 45. А если команд не менее 13, то игр было бы не менее 78. Значит, команд 11 (55 игр) или 12 (66 игр). В каждой из игр 15 баллов суммарно команды набирают точно! И 7 баллов дополнительно, если была ничья. Таким образом, суммарное количество ничьих это (1151-55×15)/7 (число нецелое – не могло так быть) или (1151-66×15)/7=23. Поэтому единственный вариант – было 12 команд.

Оценка задания.

Полное решение – 7 баллов. Получено, что команд было 11 или 12, и дальше один из случаев не отброшен – 3 балла. Обосновано, что игр было не меньше 53 и не больше 76 без дальнейшего продвижения – 2 балла. Правильный ответ с построенным примером – 2 балла. Только правильный ответ без пояснения – 0 баллов.