

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

9-й класс

Решения задач

9.1. $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}$.

$$17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56}.$$

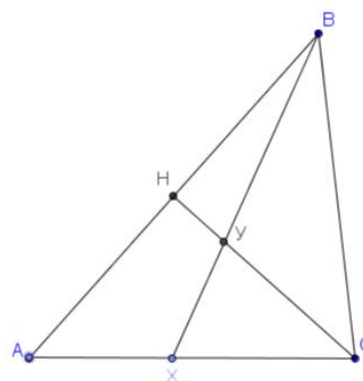
Таким образом, $31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14}$.

Ответ: 17^{14} .

9.2. Пусть m – число мальчиков, d – число девочек. Найдём общее количество «дружб» двумя способами. Поскольку каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, это число равно $4m$. С другой стороны, каждая девочка дружит с пятью мальчиками, значит, это число равно $5d$. Получаем уравнение $4m = 5d$. Поскольку $m + d = 27$, то $m = 15$, $d = 12$.

Ответ: 15 мальчиков, 12 девочек.

9.3



1) Рассмотрим треугольник ВНС, угол $\text{ВСН} = 45^\circ$, $\text{НВ} = \text{НС} = a$, $\text{ВС} = a\sqrt{2}$.

2) Треугольники ВНУ и НСА равны по катету и гипотенузе, тогда равны углы НСА и НВУ, а также ВУН, САН и ХУС.

Треугольники НВУ и ХСУ подобны по двум углам, тогда углы УХС и ВНУ прямые, ВХ – высота треугольника АВС.

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} BX \cdot 10 = 60, BX = 12, XY = 12 - 10 = 2.$$

Ответ: 2.

9.4. Объединим цифры в пары: (1, 2), (4, 5), (3, 6), (7, 8). Для того чтобы выиграть, Саша должен действовать следующим образом: если Миша на своём очередном ходу поставил какой-то знак перед некоторой цифрой, то Саша ответным ходом ставит такой же знак перед цифрой, стоящей в паре. Так как сумма цифр в каждой паре делится на 3, то и получившееся в конце игры число будет делиться на 3.

9.5. Подставим в исходное уравнение $\frac{1}{x}$ и составим систему:

$$\begin{cases} f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2 - x^2)x}{x^2} + 2f(x) = \frac{2 - x^2}{x} + 2f(x) \\ f(x) - 2\left(\frac{2 - x^2}{x} + 2f(x)\right) = \frac{2x^2 - 1}{x} \end{cases}$$

$$f(x) - \frac{4 - 2x^2}{x} - 4f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$-3f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} + \frac{4 - 2x^2}{x}$$

$$-3f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Ответ: $f(x) = -\frac{1}{x}$