

9 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Алиса оказалась в стране чудес и встретила Чеширского Кота, который предложил ей сыграть в загадочную игру. У Алисы есть мешочек с монетками. Если монеток чётное число, Алиса должна отдать половину коту. Если нечётное – кот добавляет ей ещё 5 монеток. Игра продолжается до тех пор, пока у Алисы не останется всего одна монетка. Алиса не может отказать Чеширскому Коту и не сыграть с ним в его игру, но в тоже время Алисе нужно спешить на завтрак к Белому кролику. Помогите Алисе определить, при каких начальных количествах монеток игра завершится через конечное количество ходов.

Ответ: все натуральные числа, не кратные 5.

Решение. Проследим, как будут меняться числа от 2 до 10:

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow 1, & 3 &\rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 4 &\rightarrow 2 \rightarrow 1, & 5 &\rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \\ 6 &\rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 7 &\rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \\ 8 &\rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 9 &\rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \\ 10 &\rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Заметим, что все эти числа, кроме 5 и 10, за конечное число шагов перейдут в 1. Если же первоначально у Алисы 5 или 10 монеток, то игра будет бесконечной, заиклившись на последовательности $5 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ или $10 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow \dots$.

Рассмотрим числа, большие 10. Заметим, что после операции с нечетным числом мы всегда получаем число четное: $2k + 1 \rightarrow 2k + 6$.

Покажем, что за 2 операции любое число, большее 5, уменьшается на натуральное число.

Пусть $n = 2k$ – четное. Тогда $n \rightarrow k$ после первой операции, и, если k – четное, мы вновь разделим число на 2, после чего исходное число монеток уменьшится в 4 раза. Если же k – нечетное, то $n = 2k \rightarrow k \rightarrow k + 5$, $k + 5 < 2k$, $k > 5$.

Пусть $n = 2k - 1$, $k > 5$: $n \rightarrow 2k + 4 \rightarrow k + 2$, $k + 2 < 2k - 1$, $k > 3$.

Таким образом, за конечное число шагов любое исходное число монеток перейдет в число от 1 до 10 включительно.

Рассмотрим отдельно числа, кратные 5. Покажем, что такие числа всегда будут превращаться в числа, так же кратные 5.

Пусть $n = 5(2k - 1)$ – нечетное число, кратное 5, $k > 2$:

$$5(2k - 1) \rightarrow 5(2k - 1) + 5 = 10k \rightarrow 5k.$$

Пусть $n = 5(2k)$ – четное число, кратное 5, $k > 2$: $5(2k) \rightarrow 5k$.

Следовательно, число 1 можно получить из всех натуральных чисел, не кратных 5.

Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Верно разобраны случаи для числа исходных монеток от 1 до 10, но не доказано, что число монеток убывает каждые 2 операции : не более 1 балла.

Не обосновано, что числа, кратные 5, переходят в числа кратные 5: минус 2 балла.

Вычислительная ошибка: минус 3 балла.

2. Для уравнения

$$x^2 - 2027^{2025}x + 2025^{2027} = 0$$

выясните, имеет ли оно целый корень. Если целый корень есть, найдите его, если целых корней нет - докажите это.

Ответ: целых решений нет.

Решение. Предположим, что $x = n$ – целое решение уравнения. Тогда верно:

$$n^2 - 2027^{2025}n + 2025^{2027} = 0, \quad n(n - 2027^{2025}) = -2025^{2027}.$$

Из последнего равенства следует, что n - делитель числа $-2025 = -5^2 \cdot 3^4$, а значит, n нечетно. Но тогда $n - 2027^{2025}$ – четное и в левой части последнего соотношения – четное число, в правой – нечетное. Противоречие.

Критерии. Только ответ - 0 баллов. Доказано, что если корни есть, то они являются делителями числа -2025^{2027} (возможно, с использованием теоремы Виета), дальнейшие верные рассуждения отсутствуют – не более 3 баллов.

3. Семеро друзей обсуждают, как провести вместе выходные. У них есть три варианта - поездка в горы, квест и пейнтбол. Они решили бросить жребий по следующему правилу: каждый из друзей случайным образом выбирает один из трех вариантов. Затем все голоса подсчитываются. Вариант считается принятым, если его выбрали более 50% человек. Найти вероятность того, что один из вариантов будет принятым.

Ответ: 5/6.

Решение 1. Подсчитаем сначала число вариантов распределения голосов. Пусть за поездку в горы было отдано x голосов, за квест y , а за пейнтбол z голосов. Причем $x + y + z = 7$ и x, y, z - целые числа от 0 до 7. Число решений этого уравнения можно найти как число сочетаний $C_9^2 = 36$ (в самом деле, число решений может быть найдено как число способов расставить 2 знака + между 7 единицами, при этом знаки + могут идти подряд, в том числе перед первой единицей, либо после последней единицы).

Можно найти число решений полным перебором:

Число 7 может быть представлено как сумма следующим образом:

$7=0+0+7=0+7+0=7+0+0$ (3 варианта), $7=0+1+6$ (6 вариантов), $7=0+2+5$ (6 вариантов), $7=0+3+4$ (6 вариантов), $7=1+1+5$ (3 варианта), $7=1+2+4$ (6 вариантов), $7=1+3+3$ (3 варианта), $7=2+2+3$ (3 варианта), итого 36.

Найдем далее число случаев, когда один из вариантов побеждает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $x + y + z = 7$ и $x > 3$ или $y > 3$ или $z > 3$.

Рассмотрим варианты, когда будет выбрана поездка в горы:

$x = 7, y + z = 0$; $x = 6, y + z = 1$; $x = 5, y + z = 2$; $x = 4, y + z = 3$;

Подсчитаем число решений в каждом из случаев и затем сложим: $1+2+3+4=10$. Аналогично рассмотрим варианты победы двух других вариантов. Их общее число $3 \cdot 10 = 30$. Искомая вероятность равна $P = 30/36 = 5/6$.

Решение 2. Пусть событие A = «Один из вариантов победил в голосовании». Рассмотрим противоположное событие: $\bar{A}$ = «Ни один из вариантов не победил в голосовании». Найдем вероятность этого события. Всего голоса могут распределиться 36 способами (см. решение 1). Ни один из вариантов не набирает нужного числа голосов, если каждый из вариантов набирает не более трех голосов. Это возможно, когда два варианта набрали по 3 голоса, а один набрал 1 голос, либо два варианта набрали по 2 голоса, а один – 3 голоса. Всего таких случаев 6. Значит вероятность $P(\bar{A}) = \frac{6}{36} = 1/6$, откуда $P(A) = \frac{5}{6}$.

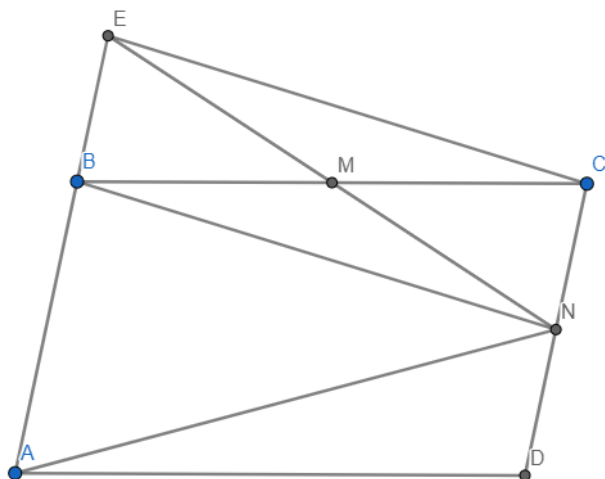
Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Верно подсчитан числитель, но в при подсчете знаменателя - ошибки, либо наоборот – не более 3 баллов.

Обосновано и верно найдена вероятность противоположного события, но исходное событие «забыли» найти: 6 баллов.

4. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N - середины сторон BC и CD соответственно, на продолжении отрезка MN за точку M отмечена точка E. При этом оказалось, что $EM = MN$, $BN = BC$. Докажите, что $EN = AN$.

Решение.



- 1) $\triangle BEM = \triangle CNM$, откуда $BE \parallel DC$, $BECN$ – параллелограмм, точки B, E, A лежат на одной прямой.
- 2) $AD = BC = BN = EC$, откуда $AECD$ – равнобедренная трапеция,
- 3) $\triangle ECN = \triangle ADN$ ($CE = DA$, $CN = DN$, $\angle ECN = \angle ADN$), откуда $EN = AN$.

Критерии. Доказано только, что $BECN$ – параллелограмм – 3 балла. Доказано, что $BECN$ – параллелограмм и $AECD$ – равнобедренная трапеция: 5 баллов.

5. На столе лежит $2n$ шаров, где n – натуральное число, большее 1. В каждый из $2n$ шаров написали какое-то число. Для любого разбиения шаров на n пар верно, что найдутся две пары с одинаковой суммой. Докажите, что существует хотя бы четыре шара с одинаковыми числами.

Ответ. Четыре шара с одинаковыми числами всегда найдутся.

Решение. Занумеруем все шары по величине записанных там чисел порядке возрастания

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_{2n}.$$

Образуем пары по порядку: первый шар со вторым, третий с четвертым и так далее. Получим такие суммы:

$$S_1 = a_1 + a_2, \quad S_2 = a_3 + a_4, \quad \dots, S_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Очевидно, что верны неравенства $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots \leq S_n$. Но по условию, в каждом разбиении на пары есть как минимум две равные суммы. Заметим, что среди этих равных сумм всегда есть две соседние, например $S_k = S_{k+1}$. Но, т.к. $a_{2k-1} \leq a_{2k} \leq a_{2k+1}$, $a_{2k} \leq a_{2k+1} \leq a_{2k+2}$, это возможно, только если $a_{2k-1} = a_{2k} = a_{2k+1} = a_{2k+2}$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

В решении есть идея упорядоченности, но вывод из нее не сделан— не более 2 баллов.

6. Докажите, что неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b$$

справедливо для любых неотрицательных чисел a, b, c .

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и сгруппируем:

$$(a^3 - a^2b) + (b^3 - b^2c) + (c^3 - c^2a) + (abc - a^2c) + (abc - b^2a) + (abc - c^2b) \geq 0.$$

Далее вынесем общие множители за скобки:

$$a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a) + ac(b - a) + ab(c - b) + cb(a - c) \geq 0,$$

$$(a - b)(a^2 - ac) + (b - c)(b^2 - ab) + (c - a)(c^2 - cb) \geq 0,$$

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0,$$

$$(a - b)(a(a - c) - b(b - c)) + c(c - a)(c - b) \geq 0,$$

Без ограничения общности можно считать, что $a \geq b \geq c$, тогда $c(c - a)(c - b) \geq 0$.

Т.к. $a \geq b$, то $a - b \geq 0$, $a - c \geq b - c$ и $a(a - c) - b(b - c) \geq 0$, откуда и следует справедливость последнего, а значит и исходного неравенства.

Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Получено одно из неравенств ниже, дальнейшего продвижения нет: 2 балла.

$$(a - b)(a^2 - ac) + (b - c)(b^2 - ab) + (c - a)(c^2 - cb) \geq 0,$$

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0,$$

Получено неравенство ниже, дальнейшего продвижения нет: 3 балла.

$$(a - b)(a(a - c) - b(b - c)) + c(c - a)(c - b) \geq 0,$$

В решении есть идея об упорядоченности чисел a, b, c , но продвижений дальнейших нет: 1 балл.