Условия и решения задач

9 класс

1. Точки *A,B,C, D* — соседние вершины правильного многоугольника (именно в такой последовательности). Известно, что угол *ACD* = 120. Сколько сторон у этого многоугольника?

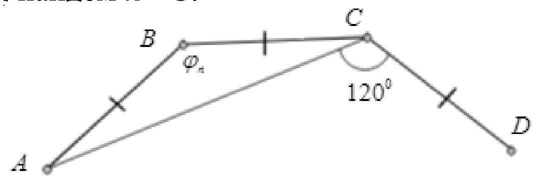
Решение. Пусть φ_n - градусная мера внутреннего угла правильного n-угольника (см. рисунок). Тогда, как известно, имеет место равенство: $\varphi_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$. Значит, $\angle ABC = \angle BCD = \varphi_n$.

Рассмотрим треугольник ABC. В нем $\angle ABC = \phi_n$; $AB = BC$ (как длины сторон правильного n-угольника). Значит, он является равнобедренным и $\angle BAC = \angle BCA =$
$= \dfrac{(n-2)\cdot 180^0}{n} - 120^0$.

Учитывая, что $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^0$, запишем уравнение:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} + \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} - 120^0\ ) = 180^0.$$

Решив это уравнение, найдем $n = 9$.



Ответ: 9 сторон.

2. На острове живет 2025 человек, каждый из которых является математиком или гуманитарием. Некоторые жители острова знакомы друг с другом, при этом каждый имеет, по крайней мере, одного знакомого. Известно, что тот, у кого среди знакомых математиков меньше чем гуманитариев, всегда врет, а все остальные всегда говорят правду. Каждый житель острова утверждает, что среди его знакомых ровно два гуманитария. Докажите, что хотя бы один человек имеет по крайней мере 4-х знакомых.

Решение. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что каждый обитатель острова имеет не более 3-х знакомых. Поскольку число всех жителей – нечетное, то хотя бы у одного количество знакомых – число четное. То есть по предположению и по условию у него ровно 2 знакомых. Если среди них есть математики, то он соврал, что среди его знакомых ровно 2 гуманитария, хотя по условию он должен говорить правду. Если же они оба гуманитарии, то он сказал правду, а должен был соврать. Полученное противоречие завершает доказательство задачи.

3. Докажите, что

$$\boldsymbol{a + b > (\sqrt{2023} + \sqrt{2024})^2}$$

если *a* > 0 , *b* > 0 и *ab* > 2023*a* + 2024*b* .

Доказательство. По условию задачи для положительных a и b выполняется неравенство $ab > 2023a + 2024b$. (*)

Поскольку $a > 0$, то неравенство (*) можно представить в виде $a > 2023 \cdot \frac{a}{b} + 2024$.

Так же, из того что $b > 0$, неравенство (*) можно представить в виде $b > 2023 + 2024 \cdot \frac{b}{a}$.

Сложим почленно два последних неравенства. Получим:

$$a + b > 2023 \cdot \frac{a}{b} + 2024 + 2023 + 2024 \cdot \frac{b}{a} = 2024 + 2023 + \left(2023 \cdot \frac{a}{b} + 2024 \cdot \frac{b}{a}\right). \qquad (**)$$

По неравенству Коши для второго члена правой части неравенства (**) имеем следующую оценку:

$$\left(2023 \cdot \frac{a}{b} + 2024 \cdot \frac{b}{a}\right) \geq 2\sqrt{2023 \cdot \frac{a}{b} \cdot 2024 \cdot \frac{b}{a}} = 2\sqrt{2023 \cdot 2024}\,. \qquad (***)$$

Поскольку $2023 + 2024 + 2\sqrt{2023 \cdot 2024} = (\sqrt{2023} + \sqrt{2024})^2$, то с учетом (**) и (***), для данных a и b имеет место неравенство $a + b > (\sqrt{2023} + \sqrt{2024})^2$.

Что и требовалось доказать.

4. Решите неравенство $\left|\frac{x-1}{x}\right|(x^2 - x - 6) \leqslant 0.$

Решение.

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|(x^2 - x - 6) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ \left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2) \leqslant 0, \\ \frac{x-1}{x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant 3, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 0) \cup (0; 3].$$

Ответ: $x \in [-2; 0) \cup (0; 3]$.

5. Найдите все простые числа x и y , удовлетворяющие уравнению $x^2 – 2y^2 = 1$.

Решение. Заменим данное по условию задачи уравнение $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2$ уравнением вида

$$(x - 1)(x + 1) = 2y^2 \qquad (*)$$

Поскольку искомыми x и y являются простые натуральные числа, то правая часть уравнение (*) является четным числом. А потому и левая часть этого уравнения должна быть четным числом.

Числа $x – 1$ и $x + 1$ имеют одинаковую четность. Поэтому их произведение будет четным числом только в том случае, когда x-1 = $2m$, $m \in N$. Откуда $x + 1 = 2m + 2$, а уравнение (*) принимает вид:

$$2m(m + 1) = y^2 \qquad (**)$$

Поскольку левая часть уравнения (**) является четным числом, то и правая часть этого уравнения должна быть четным числом. Существует единственное простое число, квадрат которого является четным числом. Это – число 2. Итак, $y = 2$. Подставив $y = 2$ в уравнение (*), получим $x^2 = 9$. Откуда $x = 3$ ($x = -3$ не натуральное число). Таким образом, искомыми простыми числами x и y, удовлетворяющими уравнению $x^2 – 2y^2 = 1$, являются числа $x = 3$ и $y = 2$.

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.