

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖИ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ КРЫМСКИЙ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ ПОСТДИПЛОМНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2024-2025 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

Задание 9.1.(7 баллов)

Найдите сумму цифр числа $10^{1000}-10^{100}-10^{10}-10$

Ответ: 8989

Решение.

1) $10^{1000}-10^{100}=999\dots9\ 000\dots0$
(900 девяток и 100 нулей)

2) $10^{1000}-10^{100}-10^{10}=999\dots9\ 8\ 999\dots9\ 000\dots0$
(899 девяток, 1 восьмёрка, 90 девяток и 10 нулей)

3) $10^{1000}-10^{100}-10^{10}-10=999\dots9\ 8\ 999\dots9\ 8\ 999\dots9\ 0$
(899 девяток, 1 восьмёрка, 89 девяток, 1 восьмёрка, 9 девяток и 1 нуль)

Находим сумму: $997\cdot 9+8\cdot 2=8989$

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Задача полностью решена
6	Арифметическая ошибка при подсчёте искомой суммы
3	Сделан второй шаг
1	Сделан первый шаг
0	Приведен только ответ или задача не решена

Задание 9.2.(7 баллов)

Числа a и b удовлетворяют условию: $\frac{7a^3 b^3}{a^6-8b^6} = 1$. Чему может равняться значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$?

Ответ : 0 или $\frac{3}{5}$.

Решение.

Преобразуем условие : $a^6 - 7a^3b^3 - 8b^3 = 0$.

Решим уравнение как квадратное относительно a^3 и получаем:

$$(a^3 + b^3) \cdot (a^3 - 8b^3) = 0$$

Рассмотрим 2 случая:

1) Если $a^3 + b^3 = 0$, то $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0$

$a = -b$ и показываем, что $a^2 - ab + b^2 > 0$, $a \neq b \neq 0$, следует из условия.

Подставим полученное значение:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2 - b^2}{b^2 + b^2} = 0$$

2) $a^3 - 8b^3 = 0$ $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) = 0$, значит $a = 2b$, подставим в условие

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4b^2 - b^2}{4b^2 + b^2} = \frac{3}{5}$$

Ответ : 0 или $\frac{3}{5}$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Рассмотрен один из случаев и получен 1 ответ
1	Получено уравнение: $(a^3 + b^3) \cdot (a^3 - 8b^3) = 0$
0	Приведен только ответ, задача не решена

Задание 9.3.(7 баллов)

Найдите все действительные значения a для которых все корни уравнения

$a \cdot (2 - a)x^2 - (a + 4)x + 6 = 0$ натуральные числа.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 1; 2

Решение.

Если $a = 0$, то $-4x + 6 = 0$, x не является натуральным числом

Если $a = 2$, то $x = 1$. И $1 \in \mathbb{N}$

Пусть $a \cdot (2 - a) \neq 0$. Решим квадратное уравнение. $D = (a + 4)^2 - 24 \cdot (2a - a^2) = (5a - 4)^2$

Откуда получаем $x_1 = \frac{3}{2 - a}$ или $x_2 = \frac{2}{a}$; $\frac{2}{a} = n$ $n \in \mathbb{N}$

тогда $a = \frac{2}{n}$. Подставим: $\frac{3}{2-a} = \frac{3n}{2(n-1)}$ $n \in N$ $\text{НОД}(n; n-1)=1$

$n-1=1$ или $n-1=3$. Получим: $n=2$ или $n=4$; $a=1$ или $a=\frac{1}{2}$

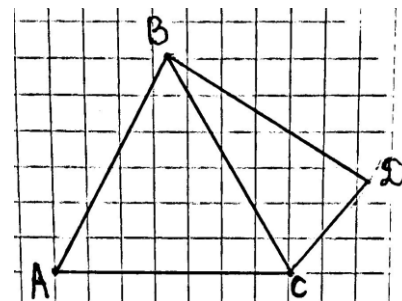
Ответ: $\frac{1}{2}$; 1; 2

Задание 9.4.(7 баллов)

На рисунке треугольники $DB=BC=CA=AB$.

Найдите величину угла ADC .

Ответ: $\angle ADC=30^\circ$

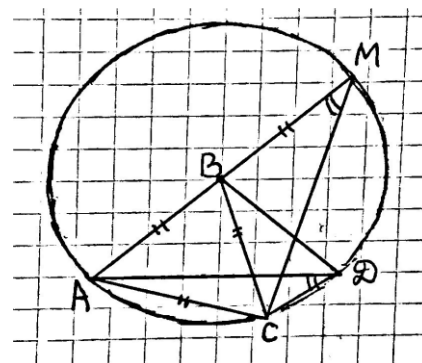


Решение.

По условию $BD=BC=BA$, построим окружность с центром в точке B .

Пусть AB пересекает окружность в точке M , тогда $\angle AMC = \angle ADC$ (опираются на одну дугу)

$\angle AMC = 90^\circ$ (AM -диаметр). По условию треугольник ABC равносторонний, поэтому центральный угол $\angle ABC = 60^\circ$. Вписанные углы $\angle AMC = \angle ADC = 30^\circ$



Ответ: $\angle ADC=30^\circ$

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Доказано, что $\angle AMC = \angle ADC$ и точки A, M, D, C – лежат на одной окружности.
1	Построена окружность с центром в точке B или отложен отрезок на прямой AB , $BM=AB$
0	Приведен только ответ

Задание 9.5.(7 баллов)

В строку выписаны **правильные несократимые дроби** со знаменателями 2,3,4,...2024

Миша и Олег перед каждой из дробей, по очереди ставят знаки «+» или «-». Миша начинает игру первый. Если в конце получается целое число, то Миша

выигрывает, а в противном случае выигрывает Олег. Кто из них выиграет при правильной игре?

Ответ: выигрывает Миша.

Решение.

Рассмотрим дроби: $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{4} * \frac{3}{4} * \dots * \frac{1}{2024} * \dots * \frac{2023}{2024}$

Первым ходом Миша перед дробью $\frac{1}{2}$ ставит «+»

Докажем лемму: если $\frac{a}{b}$, такая что $\text{HOD}(a;b)=1$, тогда дробь $\frac{b-a}{b}$ несократимая правильная дробь и $\text{HOD}(a; b)=\text{HOD}(a ;b-a)$

Согласно этой лемме количество дробей с одинаковыми знаменателями чётное .И сумма таких дробей равна 1 или -1.

Миша ожидает, пока Олег не добрался до дробей $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, и ходит аналогично. Т.е если Олег перед дробью $\frac{a}{b}$ ставит какой то знак, то Миша находит дробь $\frac{b-a}{b}$ и ставит тот же знак. В итоге сумма дробей будет целым числом.

Когда очередь дойдёт до дробей $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, то после хода Олега Миша добивается, чтобы получилась дробь $\frac{1}{2}$ или - $\frac{1}{2}$. Тогда сумма полученной дроби и первого хода Миши будет целым числом, а значит и вся сумма будет целым числом

Ответ: Миша выиграет при правильной стратегии

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение, тактика.
3	Находят дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b-a}{b}$. Указывается стратегия.
1	Показано, что количество дробей с одинаковым знаменателем чётно