

9 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. Целые положительные числа m, n, k удовлетворяют уравнению

$$m^2n^2k^2 + m^2n^2 + n^2k^2 + k^2m^2 + m^2 + n^2 + k^2 = 1969. \quad \text{Найдите } m + n + k.$$

Ответ: 17.

Решение. Перепишем уравнение задачи в виде $(m^2+1)(n^2+1)(k^2+1) = 1970$. Так как каждый из трёх сомножителей m^2+1, n^2+1, k^2+1 не меньше 2, а $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$, то $m + n + k = 1 + 2 + 14 = 17$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Проверено, что случай, когда набор чисел m, n, k составляют числа 1, 2, 14, подходит, но не доказано, что других решений нет – 1 балл.

9.2. Квадрат 8×8 разрезали на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4 . При этом общая длина разрезов оказалась равной 54. Сколько получилось квадратов 2×2 ?

Ответ: 10.

Решение. Так как $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4$, то всего получилось $8 \cdot 8 : 4 = 16$ фигурок. Так как граница каждого разреза входит в периметр двух фигурок, то сумма периметров всех фигурок равна $8 \cdot 4 + 2 \cdot 54 = 140$.

Периметр квадрата 2×2 равен 8, а периметр прямоугольника 1×4 равен 10.

Обозначив за m количество квадратов 2×2 , а за n – количество прямоугольников 1×4 , из системы уравнений $m + n = 16, 8m + 10n = 140$ находим, что m делится на 10, $m = 10k, 8k + n = 14$ и $10k + n = 16$. Так как $8k + n > 16$ при $k > 1$, то $k = 1, n = 6$ и $m = 10$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Подобран верный пример с верным ответом – 1 балл.

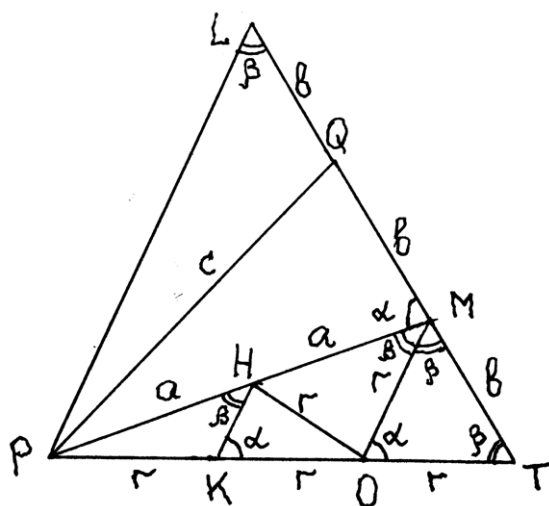
Найдена сумма периметров всех квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4 – 3 балла.

9.3. Найдите все такие тройки (p, q, r) простых чисел, что $4q-1$ простое число и $(p+q)/(p+r) = r-p$.

Ответ: $(2; 3; 2)$ – единственное решение.

Решение. Перепишем уравнение $(p+q)/(p+r) = r-p$ в виде $p^2 + p + q - r^2 = 0$. Так как это квадратное относительно p уравнение с целыми коэффициентами должно иметь целый корень, то необходимо, чтобы его дискриминант был квадратом целого числа: $D = 1 - 4q + 4r^2 = s^2$. Так как число $4q - 1 = (2r - s)(2r + s)$ – простое, то $2r - s = 1$, $2r + s = 4q - 1$, $r = q = (1 + s)/2$, $p = (-1 + s)/2$. Так как $r = p + 1$, а числа p и r простые, то $p = 2$, $r = q = 3$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Показано, что $4q - 1 = (2r - s)(2r + s)$ – 2 балла.



9.4. PM – медиана треугольника PQT. Окружность с центром O на стороне PT проходит через точки M и T, пересекает медиану PM в её середине и пересекает сторону PT в точке K так, что $PK = OK$. Докажите, что $PQ = PM$.

1-е решение. Обозначим за H середину медианы PM. Так как KH – средняя линия треугольника POM, а KHMT – вписан в окружность с диаметром KT, то $\alpha = \angle MOT = \angle HKO$, $\beta = \angle OTM = \angle OMT = \angle PHK = \angle PMO$, $\angle PMQ = 180^\circ - 2\beta = \alpha$. Треугольники PHK и PMT подобны, следовательно $\sin \alpha : \sin \beta = a : r = 3r : 2a = b : r$, откуда $a = b = r \cdot \sqrt{3/2}$. Из треугольника

OMT по теореме косинусов $\cos \alpha = (2r^2 - b^2)/2r^2 = 1/4$. Из треугольника PQM по теореме косинусов $c^2 = 4a^2 + b^2 - 4ab \cdot \cos \alpha = 4a^2$, $PQ = c = 2a = PM$.

2-е решение. Пусть $\angle PTQ = \beta$. Тогда $\angle PMO = \angle TMO = \beta$, т.е. MO – биссектриса угла PMT и $PM/MT = PO/OT = 2$. Значит, $PM = 2MT = QT$. Отметим на луче TQ точку L за точкой Q так, что $QL = QM$. Треугольник PLM равнобедренный, так как $PM = ML$. Тогда треугольники PLM и TOM подобны, $\angle MLP = \angle MPL = \beta$. Треугольник LPT равнобедренный, так как $LP = TP$. Треугольники PLQ и PTM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $PQ = PM$.

9.5. На доске записаны одинаковые числа: 2024, 2024, ..., 2024 – всего 2024 числа. На первом шаге стираются любые два числа x и y и вместо них записывается число $(x+y)/4$. Такая процедура выполняется последовательно 2023 шага, после чего на доске остаётся только одно число z . Докажите, что $z > 1$.

Доказательство. Для любых двух положительных чисел x и y справедливо неравенство $(x+y)/2 \geq 2/(1/x + 1/y)$ (среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего гармонического), причём равенство возможно только при $x = y$. Поэтому $4/(x+y) \leq 1/x + 1/y$ и, следовательно, после каждого шага сумма обратных

величин всех чисел на доске не увеличивается. Значит, $1/z \leq 2024 \cdot (1/2024) = 1$ и $z \geq 1$. Осталось заметить, что на некотором шаге заменяемые числа x и y будут различны и, следовательно, $z > 1$.

Комментарии. Доказано, что сумма обратных величин не увеличивается – 3 балла.