

9 класс

1. Пусть x – натуральное число и $n_1, n_2, \dots, n_k$ – все его различные делители. Решите уравнение $n_1 + n_2 + \dots + n_k = x + 4$.

Решение

Любое число делится на 1 и на самого себя, поэтому сумма делителей числа x равна $x + 1 + y$. Учитывая исходное уравнение, получаем, что $y = 3$. Число 3 представить в виде суммы натуральных слагаемых можно только со слагаемым 1, но такой делитель уже использован, значит, число 3 само является делителем x . Значит, число x имеет ровно три различных делителя 1, 3 и x , откуда $x = 9$, и это единственное решение.

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

Если ответ найден подбором, есть проверка найденного корня, но нет обоснования, что корень единственный – 2 балла.

Корень найден в ходе рассуждений о его делителях, имеются неточности в рассуждениях и нет обоснования, что число x не имеет других делителей, кроме 1, 3 и x – 4-5 баллов.

Корень найден в ходе рассуждений о его делителях с полным обоснованием, но имеются неточности в рассуждениях и – 6-7 баллов.

2. Каждое утро буднего дня в одно и то же время прокурора Иванова от дома забирали служебный автомобиль и отвозил на работу. Однажды прокурор Иванов вышел из дома на работу на час и пятнадцать минут раньше обычного и пошел пешком на работу по обычному маршруту. По дороге его подобрал служебный автомобиль и привез на работу на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость автомобиля больше скорости прокурора Иванова?

Решение

Рассмотрим движение каждого объекта в отдельности.

Прокурор был в пути на $75-10=65$ минут больше обычного за счет того, что некоторый отрезок пути он прошел пешком.
Автомобиль был в пути на 10 минут меньше обычного, так как этот отрезок пути он дважды не проезжал. То есть автомобиль проезжает этот отрезок за 5 минут.
Значит, прокурор проходит этот отрезок за $65+5=70$ минут.
Поэтому скорость автомобиля в $70:5=14$ раз больше скорости прокурора Иванова.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Решение с ошибкой, заключающаяся в том, что за 65 минут приняли время, за которое прокурор прошел отрезок пути от дома до места, где его подхватил автомобиль, при верном остальном рассуждении – 2 балла.

Полное и верное решение задачи – 7 баллов.

3. Имеется четыре кучки камней: в трех кучках по 20 камней, а в четвертой – 30 камней. Играют двое. Ходы делают по очереди. За один ход игрок может взять любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает первый игрок.

Выигрышная стратегия состоит в уравнивании камней в кучках.

Первый игрок первым своим ходом забирает 10 камней из кучки, в которой 30 камней.

Первый игрок мысленно объединяет кучки в пары: в кучках первой пары по 20 камней, в кучках второй пары – по 20 камней.

Второй игрок каждым своим ходом вынужден нарушать равенство в одной из пар. Первый игрок, следующим своим ходом, это равенство восстанавливает.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Только верный ответ и приведен пример игры – 0 баллов.

Записана идея об уравнивании камней в кучках, но дальнейшего продвижения нет – 2 балла.

Полное и обоснованное решение – 7 баллов.

4. Найдите значение старшего коэффициента квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при котором его дискриминант равен 23.

Решение

$$D = b^2 - 4ac = 23, \quad b^2 - 1 = 2(2ac + 11), \quad (b - 1)(b + 1) = 2(2ac + 11).$$

В левой части равенства записано произведение чисел одинаковой четности, они оба четные, так как равны четному числу. Тогда их произведение должно быть кратно 4, а правая часть равенства кратна 2, но не кратна 4, значит такого уравнения не существует.

Критерии оценивания

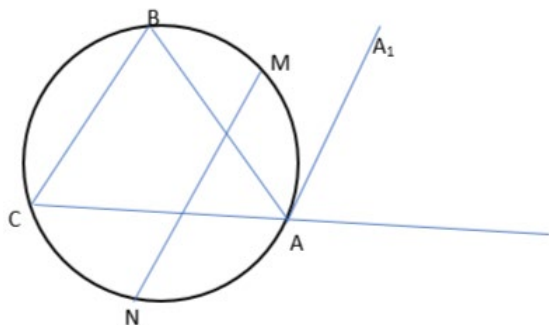
Только верный ответ – 0 баллов.

Выполнены преобразования дискриминанта, позволяющие сделать нужную оценку, но оценки нет или она выполнена неверно – 4 балла.

Выполнены преобразования дискриминанта, позволяющие сделать нужную оценку, оценка выполнена, но имеются неточности в рассуждениях 5-6 баллов.

Все необходимые рассуждения выполнены правильно и получен верный ответ – 7 баллов.

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Найти угол между биссектрисой внешнего угла треугольника при вершине A и стороной AB, если угол между стороной AB и хордой, которая соединяет середины дуг, стягиваемых сторонами AB и AC исходного треугольника равен 50° .



Решение Пусть MN – хорда, которая соединяет середины дуг, стягиваемых сторонами AB и AC. Проведем AA₁ – биссектрису внешнего угла треугольника при вершине A. Угол между хордами AB и MN равен половине суммы градусных мер дуг BM и AN. Градусная мера дуги BM равна градусной мере угла C треугольника ABC. Аналогично градусная мера дуги AN равна градусной мере угла B треугольника ABC.

Следовательно, угол между хордами AB и MN равен половине суммы углов при вершинах C и B треугольника ABC, т.е. половине внешнего угла A треугольника ABC.

Ответ: 50°

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

Искомый угол выражен через углы треугольника - 1 балл.

Угол между хордами AB и MN выражен через дуги BM и AN – 3 балла.

Полученные баллы суммируются.

Все необходимые рассуждения выполнены правильно и получен верный ответ, но имеются неточности в обосновании отдельных выводов - 5-6 баллов.

Все необходимые рассуждения и обоснования выполнены правильно и получен верный ответ – 7 баллов.