

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024-2025 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

9 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой). Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. Найдите наибольшее шестизначное число, произведение всех цифр которого равно 2025.

Решение.

В наибольшем возможном шестизначном числе наибольшие цифры стоят в наивысших разрядах.

$2025 = 5^2 \cdot 3^4$. Наибольший однозначный делитель числа 2025 — 9, поэтому искомое число точно начинается с этой цифры. Произведение всех оставшихся цифр равно $225 = 5^2 \cdot 3^2$. Наибольший однозначный делитель числа 225 тоже 9, поэтому второй цифрой числа будет стоять именно она. Произведение следующих четырех цифр равно 25, поэтому наибольшее число будет заканчиваться на 5111.

Ответ: 995511.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

2. Футбольный турнир проходил в один круг, все команды набрали разное число очков (за победу – 2 очка, ничья – 1 очко, поражение 0). Команда, занявшая последнее место, выиграла у всех трех призеров. Могло ли в турнире участвовать 12 команд?

Решение.

Если в турнире участвовало 12 команд, то всего было сыграно $12 \cdot 11 / 2 = 66$ игр, разыграно $2 \cdot 66 = 132$ очка.

Обозначим x_k число очков, полученных командой занявшей k -ое место. По условию $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{12}$, причем $x_{12} \geq 6$ так как последняя команда одержала три победы.

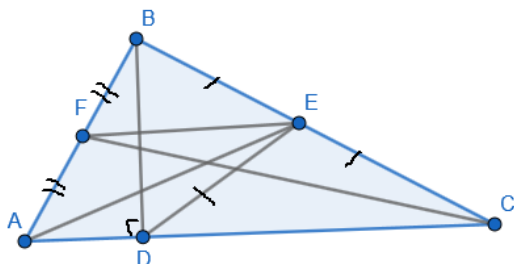
Разберемся с суммой всех очков: $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} + x_{12} \geq 6 + 7 + \dots + 16 + 17 = 138$ – противоречие. Значит 12 команд принимать участие не могли

Ответ: нет.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота BD и медианы AE и CF. Докажите, что углы треугольника FDE и заданного треугольника совпадают.

Решение.



Из условия задачи, следует, что EF – средняя линия треугольника ABC, значит, $EF \parallel AC$ и $EF = 0,5AC$.

Так как DE – медиана прямоугольного треугольника BDC, то $DE = 0,5BC$.

Так как $DE = EC$, то $\angle ACE = \angle EDC = \angle DEF$.

Тогда треугольники FDE и ABC подобны, так как $FE:AC = DE:BC$ и равны углы между этими сторонами.

У подобных треугольников соответствующие углы равны ($\angle E = \angle C$, $\angle D = \angle B$, $\angle F = \angle A$).

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

4. Какая цифра стоит первой после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2 + n}$, где n – натуральное число?

Решение.

Очевидно, что при всех n : $n^2+n < (n+0,5)^2$

Получим оценку снизу: $(n+0,4)^2 < n^2+n$, так как $0,8n+0,16 < n$ при всех $n > 0,8$, то есть при всех натуральных n .

Таким образом: $(n+0,4)^2 < n^2+n < (n+0,5)^2$, а значит первая цифра после запятой – 4.

Ответ: цифра 4.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

5. Восемь друзей играют по ночам в сетевую игру, но одновременно получается выйти на связь только троим из них. Но там они ссорятся и никакие двое не хотят играть вместе второй раз. Какое наибольшее количество ночей это может продолжаться?

Решение.

Оценка. Рассмотрим любого из друзей. В каждой игре он находится вместе с двумя своими друзьями, поэтому через три ночи останется только один друг, вместе с которым он не играл и он уже не сможет играть, так как для них не будет третьего.

Эта ситуация симметрична, то есть если друг А не играл после трех ночей с другом В, то и друг В не играл с другом А.

Значит есть как минимум 4 пары друзей, которые в одной игре не играли и не будут играть. Возможных пар $8 \cdot 7 / 2 = 28$, поэтому сыграют не более чем 24 пары. Так как за одну ночь задействованы три пары друзей, то ночей может быть не более 8.

Пример. Обозначим друзей 1,2,3,4 А, Б, С, Д. Тогда 8 троек, удовлетворяющих условию задачи: А12, Б23, С34, Д41, АВ4, ВС1, СД2, АД3

Ответ: 8 дней.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов. Доказана оценка - 4 балла, приведен правильный пример - 3 балла.