

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. Оля опасается ездить в темноте и потому до захода солнца едет со скоростью 100 км/ч, а после захода солнца — со скоростью 60 км/ч. Она выехала в 17:00, ехала без остановок и за три часа проехала 230 км. Когда зашло солнце?

Ответ. В 18:15. **Решение.** Пусть до захода солнца прошло x часов. Тогда Оля проехала $100x + 60(3-x) = 230$ км, откуда $x = 5/4$ часа, то есть 1 час 15 минут. Прибавляя 1 час 15 минут к 17 часам, получаем ответ.

• Только ответ — 0 баллов. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — не выше 3 баллов.

Задача 2. Каждый из пяти мальчиков — либо лжец, который всегда лжет, либо честный человек, который всегда говорит правду. Между ними произошел такой разговор. Антон — Боре: «Ты лжец!» Боря — Антону: «Это ты лжец!» Вася — Гене: «Ты всегда лжешь!» Гена — Васе: «Сам такой!» Дима, обращаясь к остальным: «Среди нас пятерых — трое честных.» Сколько честных среди этих пятерых может быть на самом деле? Найдите все возможные варианты, ответ объясните.

Ответ. Двое или трое. **Решение.** Антон и Боря называют друг друга лжецами, если оба они лжецы, то оба говорят правду, а если оба честные — то оба лгут. Если же один из них честный, а другой лжец, то все сходится: честный говорит правду, а лжец — неправду. По той же причине в паре из Васи и Гены один честный, а другой — лжец. Дима же может быть лжецом — и тогда он лжёт, так как честных в этом случае двое, или честным — и тогда он говорит правду, потому что честных в этом случае трое.

• Только один из двух ответов, объяснения нет — 1 балл. Оба ответа без объяснения — 2 балла. Оба ответа с проверкой, если из объяснений не следует, что других ответов нет — 3 балла.

Задача 3. Сумма кубов двух не равных 0 чисел равна сумме их четвертых степеней и сумме их пятых степеней. Найдите сумму сотых степеней этих чисел.

Ответ. 2. **Решение.** Обозначим данные числа a и b . $(a^3+b^3)(a^5+b^5) = (a^4+b^4)^2$ по условию. После раскрытия скобок, и приведения подобных членов получаем $a^3b^5+a^5b^3 = 2a^4b^4 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$. Подставляя $a = b$ в равенство $a^3+b^3 = a^4+b^4$, получаем $2a^3 = 2a^4$, откуда (так как a и b не равны 0) $a = b = 1$ и $a^{100}+b^{100} = 2$.

Задача 4. В треугольник ABC вписана окружность, а в нее — треугольник DEF со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC. Верно ли, что отношение площади треугольника DEF к площади треугольника ABC обязательно больше 1/2024?

Ответ. Неверно. **Решение.** Возьмем треугольник ABC с основанием $BC = 20000$ и высотой $AN = 1$. Диаметр вписанного в него круга меньше, чем AN . Значит, его площадь и, тем более, площадь любого вписанного в него треугольника меньше π . Тем самым, отношение площади треугольника DEF к площади треугольника ABC меньше, чем $\pi/10000$, что меньше, чем 1/2024.

• Только ответ — 0 баллов.

Задача 5. Найдите все целые числа a , большие 1, у которых куб суммы цифр равен a^2 .

Ответ. Единственное такое число — 27. **Решение.** В решении задачи 5 для 7 класса показано, что все искомые числа являются кубами натуральных чисел, и среди чисел, меньших 1000, единственным искомым является 27. Покажем, что среди чисел, не меньших 1000, искомым чисел нет. Пусть в десятичной записи числа a n знаков, где $n \geq 4$. Тогда $a \geq 10^{n-1}$, а сумма его цифр не превосходит $9n$. Покажем, что при всех $n \geq 4$ выполнено неравенство $(9n)^3 < 10^{2(n-1)}$ (*). При $n = 4$ имеем $36^3 < 100^3 = 10^{2 \cdot (4-1)}$. Далее каждый раз с ростом n на единицу число $10^{2(n-1)}$ увеличивается в 100 раз, а число $(9n)^3$ — в $(n+1)^3/n^3 = ((n+1)/n)^3$ раз, что меньше 2^3 , так как $(n+1)/n = 1 + 1/n < 2$. Поэтому правая часть в неравенстве (*) с ростом n растет быстрее левой, и это неравенство сохраняется.

• Только ответ — 1 балл.

Задача 6. Есть две кучки по 11 монет в каждой. Известно, что в каждой кучке 10 настоящих монет и одна фальшивая, которая легче настоящей. Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые — тоже. Можно ли за **одно** взвешивание на чашечных весах гарантированно найти не менее 8 настоящих монет?

Ответ. Можно. **Решение.** Положим на одну чашу весов 8 монет из кучки А, а на другую — оставшиеся 3 монеты из кучки А и 5 монет из кучки Б. Так как все монеты из кучки А — на весах, там есть хотя бы одна фальшивая монета. Если одна из чашек перевесит, то все монеты на ней — настоящие, и задача решена. Если же весы в равновесии, то там есть фальшивая монета из кучки Б, и мы нашли даже 9 настоящих монет: 3 монеты из кучки А, лежащие на чаше вместе с монетами из кучки Б, и 6 монет из кучки Б, не лежащие на весах.