ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

9.1. На доске написано десять чисел. Разрешается выбрать любые три из них (в любом порядке) и прибавить к первому из них число 1, ко второму − число 3, к третьему − число 6. Получившиеся три числа записываются на доску вместо трех выбранных. С новым набором из десяти чисел проделывают аналогичные действия. И т.д. Можно ли за несколько шагов получить набор из десяти равных чисел, если первоначально на доске были написаны числа 1, 2, 3, …, 9, 10?

Ответ: нельзя.

Решение: Станем следить за суммой чисел, написанных на доске. При каждом преобразовании эта сумма увеличивается на 1+3+6=10. Первоначально сумма было равна 1+2 + 3+...+9+10=55. Значит, сумма всегда имеет вид 55 +10n, где n − число преобразований набора на доске. Если бы все числа на доске стали равными, скажем, x, то сумма была бы равна 10x, т.е. получили бы 55 +10n =10x , что невозможно, т.к. 55 не делится на 10.

9.2. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2$ – $6x$ +1 =0.
(Указание: Площадь круга радиуса R находится по формуле: $S = \pi R^2$).

Ответ: 2π .

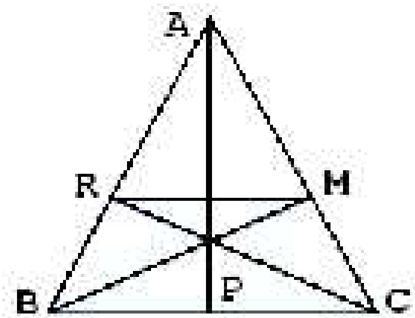
Решение:
Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2$ – $6x$ +1 =0.
Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{6}{2} = 3$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.
Тогда площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника с катетами x_1, x_2, равна

$$\pi R^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{\pi}{4}((x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2) = \frac{\pi}{4}(3^2 - 1) = 2\pi.$$

Комментарий. Допущена арифметическая ошибка – не более 4 баллов.

9.3. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а боковая сторона равна 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найдите длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

Ответ: $\frac{28}{3}$



Решение:
Пусть AP – третья высота треугольника ABC. Тогда
$AP = \sqrt{AB^{\ 2} - BP^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = 12\sqrt{2}$
$2S_{ABC} = BC \cdot AP = AC \cdot BM$.
Отсюда находим, что ВМ $= \frac{\text{BC}\cdot\text{AP}}{\text{AC}} = \frac{12\cdot 12\sqrt{2}}{18} = 8\sqrt{2}$
$AM = \sqrt{AB^{\ 2} - B\text{M}^2} = \sqrt{324 - 128} = 14$
Из подобия получаем, что $\frac{RM}{BC} = \frac{AM}{AC}$
Следовательно: $RM = \frac{BC\cdot AM}{AC} = \frac{12\cdot 14}{18} = \frac{28}{3}$

9.4. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина – на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий?

Ответ: с первого на второй.

Решение 1

Предположим, что за весь день на первом этаже в лифт вошло **x** покупателей, на втором – **y**, на третьем – **z**. Заметим, что общее количество покупателей, вышедших из лифта на этажах, равно количеству покупателей, вошедших в лифт на этажах.

По условию, из покупателей, вошедших на втором этаже, половина едет вниз, а половина – вверх. Значит, со второго этажа на третий едет $y/2$ покупателей, и столько же со второго на первый. Второе условие можно записать так: $\mathbf{z < ⅓ (x + y + z)}$. Это равносильно тому, что $\mathbf{2z < x + y}$.

С первого этажа на третий было совершено $\mathbf{z - y/2}$ поездок, так как всего на третьем этаже вышли из лифта $\mathbf{z}$ человек, а $y/2$ из них приехали со второго этажа. А с первого на второй поднимались те покупатели, входившие в лифт на первом этаже, кто не ехал на третий, то есть их было $\mathbf{x - (z - y/2)}$. Нам нужно сравнить эти два выражения. Но неравенство $\mathbf{z - y/2 < x - (z - y/2)}$ равносильно уже доказанному неравенству $\mathbf{2z < x + y}$. Тем самым мы доказали, что с первого этажа на третий за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Решение 2

Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с него. Значит, последняя группа больше первой.

Вычтем из третьей и первой групп равные количества поездок: из третьей – поездки со второго этажа на первый, а из первой – со второго на третий. В результате получим, что поездок с первого этажа на второй больше, чем с первого на третий.

9.5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3y^5 = 3^{50} \cdot 6^{50} \cdot 10^{33}$?

Ответ: 126.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5.

Тогда числа x^3 и y^5 можно записать как $x^3 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, $y^5 = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид

$2^{3a+5m} \cdot 3^{3b+5n} \cdot 5^{3c+5k} = 2^{83} \cdot 3^{100} \cdot 5^{33}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 3a + 5m = 83 \\ 3b + 5n = 100 \\ 3c + 5k = 33 \end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия m $\in\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$, n $\in\{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20\}$, k $\in$ $\{0; 3; 6\}$. Получаем шесть вариантов для первого уравнения, семь для второго и три варианта для третьего. В итоге $6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$ решений.

Комментарий. Составлена система условий – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.