

9 класс

1. Маша утверждает, что её любимое число состоит из пяти различных цифр, причём сумма любых двух из них не заканчивается на цифру, совпадающую с какой-то из остальных цифр числа. Могут ли слова Маши быть правдой? (Если могут, приведите пример такого числа и объясните, почему оно подходит. Если не могут, объясните, почему такого числа не существует)

Ответ: могут.

Решение. Например, у числа 13579 все цифры нечётны, поэтому сумма любых двух чётна и не заканчивается на нечётную цифру.

2. Река течёт из города А в город В. В реке плавает щука, а по берегу реки ползает рак. Если рак выползет из города А навстречу щуке, которая одновременно выплывет из города В, то они встретятся через полтора часа. Если же, наоборот, щука выплывет из А, а рак одновременно выползет из В, то они встретятся через час. Через сколько времени они бы встретились, если бы течения в реке не было?

Ответ: через 72 минуты.

Решение. Обозначим скорость сближения рака и щуки через u (км/ч), скорость течения реки через v (км/ч), а расстояние между городами через s (км). Так как первый раз до встречи прошло больше времени, то щука плыла против течения. Значит, $u - v = s/1,5$ и $u + v = s$. Сложив эти два равенства, получим $2u = 2/3s + s = 5/3s$, откуда $s/u = 6/5$, т.е. без течения рак и щука встретились бы через 72 минуты.

3. Про натуральные числа a , b и c известно, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(a, c) - \text{НОД}(b, c) = a + b + c$. Докажите, что какое-то одно число делится на какое-то другое.

Решение. Допустим, ни одно число не делится на другое.

а) Пусть a — наибольшее, тогда

$$\text{НОК}(a, b) \geq 2a, \text{НОК}(a, c) \geq 2a, \text{НОД}(b, c) \leq \min(b, c)$$

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(a, c) - \text{НОД}(b, c) > 4a - \min(b, c) > 3a > a + b + c$$

б) Пусть b — наибольшее (c — наибольшее, делается аналогично), тогда

$$\text{НОК}(a, b) \geq 2b, \text{НОК}(a, c) \geq 2 \cdot \max(a, c) > a + c, \text{НОД}(b, c) \leq \min(b, c) = c$$

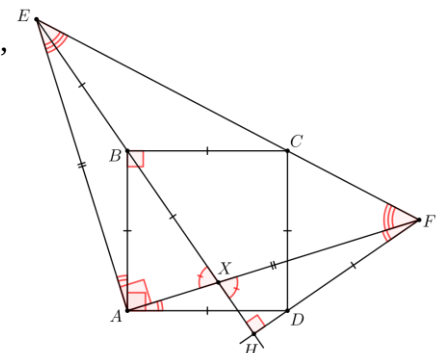
$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(a, c) - \text{НОД}(b, c) > 2b + a + c - c = 2b + a > a + b + c$$

4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X так, что $AB = BX$. Точка E такова, что B — середина отрезка XE . Лучи AX и EC пересекаются в точке F . Докажите, что прямые BX и DF перпендикулярны.

Решение. Заметим, что точки A, E, C, X равноудалены от точки B , поэтому лежат на одной окружности с центром в точке B . Угол ABC — центральный и равен 90° , угол AEC — вписанный, значит, он равен 45° . Треугольник AEF прямоугольный ($\angle EAX$ опирается на диаметр) с углом 45° , то есть равнобедренный, значит, $AE = AF$.

С другой стороны $\angle BAE = \angle DAF = 90^\circ - \angle BAX$, поэтому треугольники ABE и ADF равны по первому признаку.

Пусть H — точка пересечения BX и DF . Тогда $\angle HXF + \angle HFX = \angle AXB + \angle DAF = \angle BAX + \angle DAF = 90^\circ$.



5. В круг встали 33 человека, каждый из которых рыцарь или лжец. (Рыцари это те, кто всегда говорит правду, лжецы это те, кто всегда врут.) Сначала каждого спросили: «Кто твой сосед справа?». Было получено N ответов «Рыцарь». Потом каждого спросили: «Кто человек, стоящий через одного справа от тебя?». Было снова получено N ответов «Рыцарь». Потом

каждого спросили: «Кто человек, стоящий через два справа от тебя?» И снова получилось N ответов «Рыцарь». И так далее, каждый раз получалось N ответов «Рыцарь». (В итоге каждому было задано по 32 вопроса.) Чему может быть равно N ?

Ответ: 31, 33.

Решение. Ответ «Рыцарь» мог быть только в парах Р-Р и Л-Л. В парах Л-Р и Р-Л ответ был «Лжец», их тоже всегда было одно и то же число, допустим y . Заметим, что y равно количеству пар рядом стоящих Р и Л (это следует из первого заданного вопроса), а значит чётно. Всего ответов «Лжец» было равно $32 \cdot y$. И равно удвоенному количеству пар Р-Л (так как они считались как Р-Л и как Л-Р). Пусть было n рыцарей, тогда получаем $32 \cdot y = 2 \cdot n \cdot (33 - n)$ или $16 \cdot y = n \cdot (33 - n)$. Левая часть делится на 32. Числа n и $33 - n$ разной чётности, значит одно из них делится на 32. Так как ответы не меняются, если рыцарей заменить на лжецов, а лжецов заменить на рыцарей, поэтому будем считать, что n делится на 32, то есть равно 0 или 32.

Если рыцарей 0, то каждый раз будет 33 ответа «Рыцарь».

Если 1 лжец и 32 рыцаря, то каждый раз будет 31 ответ «Рыцарь» («Лжец» будут говорить лжец, и рыцарь, говорящий про лжеца)