

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
КУРГАНСКАЯ ОБЛАСТЬ  
2024–2025 учебный год  
9 класс

Каждое задание оценивается в 7 баллов.

Время выполнения – 235 минут.

Максимальный балл – 35.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения                                                                                                                                      |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7     | Полное (верное) решение.                                                                                                                                                |
| 6-7   | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.                                                                                             |
| 5-6   | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4     | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.                                            |
| 2-3   | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.                                             |
| 1     | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).                                                                                 |
| 0     | Решение неверное, продвижения отсутствуют.                                                                                                                              |
| 0     | Решение отсутствует.                                                                                                                                                    |

**\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

**9.1.** Решите уравнение  $1 - (2 - (3 - (...2022 - (2023 - (2024 - x))...))) = 1012$

**Ответ:**  $x=2024$ .

**Решение.** Открыв скобки, получим  $1 - 2 + 3 - 4 + ... + 2023 - 2024 + x = 1012$ ;  $-1012 + x = 1012$ ;  $x=2024$ .

**9.2.** Определите количество таких пар натуральных чисел  $(m, n)$ , что  $m \leq n$  и  $\text{НОД}(m, n) = 2023$ ,  $\text{НОК}(m, n) = 20! \cdot 23!$ . (Напомним, что  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ )

**Решение:** для искомых пар  $(m, n)$  невозможно равенство  $m = n$ . Поэтому достаточно найти количество всех подходящих пар без условия упорядоченности и поделить пополам. Запишем разложения  $2023 = 7 \cdot 17^2$ ,  $20! \cdot 23! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23$ . Для наибольшего общего делителя всегда выбирается наименьшая из степеней простого числа, входящего в разложение  $m$  и  $n$ , а для наименьшего кратного – наибольшая из степеней. Поэтому в одно из чисел  $m$  и  $n$  простой множитель 2 входит в степени 0, а в другой – в степени  $a$ , т.е. есть 2 варианта. Аналогично со всеми остальными простыми из разложения, кроме 17, и на каждый у нас есть по два независимых варианта. Значит всего комбинаций, как распределить простые множители по числам  $m$  и  $n$  будет  $2^8$ , а итоговый ответ –

половина этого числа, т.е. 128.

**Критерии:**

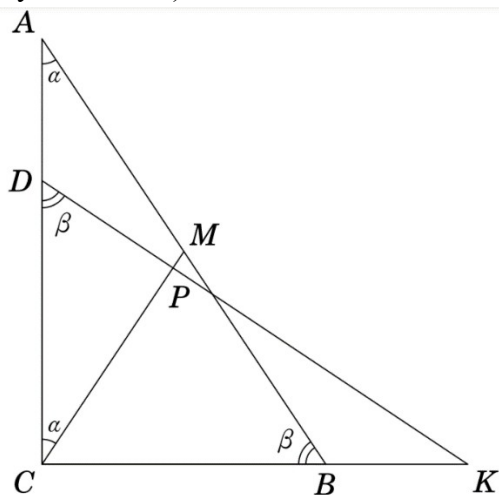
- Сформулировано, как распределяются степени простых множителей в НОК и НОД – 2 балла.
- Посчитано количество пар без учёта условия  $m \leq n$  – минус 1 балл.

**9.3.** Два равных прямоугольных треугольника  $ABC$  и  $CDK$  имеют общий прямой угол  $C$ . Докажите, что медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна стороне  $DK$  треугольника  $CDK$ .

**Решение.** Пусть  $P$  – точка пересечения стороны  $DK$  и медианы  $CM$ . Тогда треугольник  $CPD$  – прямоугольный (  $\triangle CMA$  – равнобедренный,  $\angle MCA = \angle MAC = \alpha$ ,  $\angle KDC = \beta$ , поскольку треугольники  $ABC$  и  $CDK$  равны, то  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ).

**Критерии**

1) Решения задачи в частном случае (равнобедренные треугольники, конкретные углы в треугольниках) оценивается в 1 балл.



**9.4.** В 10Б классе 24 ученика. На выборах старосты каждый из них проголосовал за одного из своих одноклассников (за себя голосовать нельзя). Докажите, что в этом классе можно выбрать группу из восьми человек, среди членов которой никто ни за кого не голосовал

**Решение.** Рассмотрим наибольшую группу  $A$  учащихся, в которой никто ни за кого не голосовал. Тогда каждый из оставшихся учеников попадает в группу  $B$  тех, за кого голосовали учащиеся из группы  $A$ , либо в группу  $C$  тех, кто голосовал за учащихся из группы  $A$  (иначе его можно было бы добавить к  $A$ , что противоречит её максимальности). Ясно, что в  $B$  школьников не больше чем в  $A$ . Но и в  $C$  школьников не больше чем в  $A$ , поскольку в ней никто ни за кого не голосовал. Следовательно, в  $A$  не меньше 8 человек.

**9.5.** Имеется кучка аккумуляторов, среди которых  $\ell$  заряженных и  $n$  разряженных. Заряженные и разряженные аккумуляторы перемешаны и не отличаются на вид. Если в детскую машинку вставить два заряженных аккумулятора и включить машинку, то машинка поедет. А если хотя бы один аккумулятор из двух разряжен – то не поедет. Назовем пробой установкой пары аккумуляторов и включение машинки. Какое

наименьшее число проб гарантирует, что машинка поедет, если:

а) (3 балла)  $\ell = n+1$ ;

б) (4 балла)  $\ell = n$ ?

**Решение.**

а) Пусть проб было  $n + 1$ . Для краткости будем называть аккумулятор «актором». Поскольку всего акторов  $2n+1$ , есть актер А, который участвовал хотя бы в двух пробах. Назначим его разряженным. В остальных  $n - 1$  пробах назначим разряженным один актер кроме А. Тогда разряженных актеров не более  $n$ , а машинка не едет ни при одном включении. Разобьем актеры на группки:  $n - 1$  по два актера и 1 из трех актеров. Если можно сделать  $n + 2$  пробы, то проверим все пары актеров из одной группки: по одной паре в группках из двух актеров и три пары в группке из трех. Поскольку в одной из  $n$  группок есть два заряженных актера, то машинка хотя бы однажды поедет.

б) Пусть проб было  $n + 2$ . Тогда некоторый актер (назовем его В) участвовал более чем в одной пробе. Назначим его разряженным. Если проб без участия В было  $n - 1$  или меньше, то назначим в каждой такой пробе один разряженный актер. Всего будет не более  $n$  разряженных, а машинка ни после какой пробы не поедет. Если же проб без участия В было  $n$ , то поскольку в этих пробах участвовали не более  $2n - 1$  актеров, среди них найдется актер С, который участвовал более чем в одной пробе. Назначим его разряженным. Остальных проб не более  $n - 2$ , в каждой из которых назначим один разряженный актер. Тогда всего не более  $n$  разряженных актеров, а машинка ни при одном включении не едет. Если можно сделать  $n+3$  проб, то разобьем актеры на группки: 2 по три, остальные по два. Тогда всех пар актеров, принадлежащих одной группке,  $(n-3) + 3+3 = n+3$ . Так как группок  $n-1$ , в одной из группок есть два заряженных актера. После их включения машинка поедет.