9 класс

9.1 Три друга хотели купить сувенир. Для покупки сувенира Мише не хватает 5 монет, Жени не хватает 6 монет, Васе не хватает 7 монет. Если любые два друга сложатся, то монет все равно не хватит. Если сложатся все друзья, то монет хватит с избытком. Сколько стоит сувенир?

Решение

Пусть x монет – стоимость сувенира.

Из условия задачи следует:

$x-6$ – количество монет у Миши

$x-5$ – количество монет у Жени,

$x-7$ – количество монет у Миши.

Так как общего количества монет у мальчиков хватит на покупку сувенира с избытком, то $x<x-6+x-5+x-7$.

Среди пар мальчиков наибольшее общее количество монет у Миши и у Жени, но этого количества все равно не хватает на покупку сувенира, поэтому

$x>x-6+x-5$.

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} x<3x-18, \\ x>2x-11. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} x>9, \\ x<11. \end{cases}$

Делаем вывод $x=10$.

Ответ: 10.

9.2 Докажите, что $3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}\cdot 2^{2n}$ делится на 1053 при любом натуральном n.

Решение:

Докажем методом математической индукции

n=1 $(3^{2\cdot 1+2}\cdot 5^{2\cdot 1}-3^{3\cdot 1+2}\cdot 2^{2\cdot 1}=3^4\cdot 13)\ \vdots\ 1053$

n=k $(3^{2k+2}\cdot 5^{2k}-3^{3k+2}\cdot 2^{2k})\ \vdots\ 1053$

$n=k+1$ $\quad 3^{2(k+1)+2}\cdot 5^{2(k+1)}-3^{3(k+1)+2}\cdot 2^{2(k+1)}=$

$$=3^{2k+4}\cdot 5^{2k+2}-3^{3k+5}\cdot 2^{2k+2}=$$

$$=3^{2k+2}\cdot 5^{2k}\cdot 3^2\cdot 5^2-3^{3k+2}\cdot 2^{2k}\cdot 3^3\cdot 2^2=$$

$$=225\cdot 3^{2k+2}\cdot 5^{2k}-108\cdot 3^{3k+2}\cdot 2^{2k}=$$

$$=225\cdot 3^{2k+2}\cdot 5^{2k}-108\cdot 3^{3k+2}\cdot 2^{2k}-117\cdot 3^{3k+2}\cdot 2^{2k}+117\cdot 3^{3k+2}\cdot 2^{2k}=$$

$$=225\cdot(3^{2k+2}\cdot 5^{2k}-3^{3k+2}\cdot 2^{2k})+117\cdot 3^{3k+2}\cdot 2^{2k}=$$

$$=225\cdot(3^{2k+2}\cdot 5^{2k}-3^{3k+2}\cdot 2^{2k})+117\cdot 9\cdot 3^{3k}\cdot 2^{2k}.$$

Итак, доказано для n=1 и из предположения, что верно для $n=k$, следует, что верно для $n=k+1$. Следовательно, утверждение верно для любого натурального n.

9.3 Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 5, которые можно составить с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в записи каждого числа могут повторяться.

Решение:

Найдем количество чисел, удовлетворяющих условию задачи.

На первое место можно поставить цифру 7-ю способами, так как можно использовать любую из предложенных цифр, кроме 0. На второе место можно поставить цифру 8-ю способами. На последнем месте может быть только 0 или 5, так как число делится на 5. Таким образом, общее количество чисел равно 7·8·2 = 112.

Будем отдельно подсчитывать суммы сотен, десятков и единиц рассматриваемых чисел.

Чисел, начинающихся на 1, на 2, … на 7, одинаковое количество, оно равно 112:7=16. Значит, сумма всех сотен рассматриваемых чисел вычисляется так: 16·(1+2+3+4+5+6+7)·100 = 44800.

Чисел, у которых вторая цифра равна или 0, или 1, … или 7, одинаковое количество, оно равно 112:8=14. Значит, сумма всех десятков рассматриваемых чисел равна 14·(0+1+2+3+4+5+6+7)·10 = 3920.

Среди всех 112 чисел половина заканчивается на 0 и половина заканчивается на 5, следовательно, сумма чисел, стоящих в разряде единиц, равна 56 (0+5) = 280.

Таким образом, искомая сумма равна 44800+3920+280 = 49000

Ответ: 49 000.

9.4 Имеется сплав серебра и меди, если бы его сплавили с 3 кг чистого серебра, то получили бы сплав содержащий 90% серебра. А если бы его сплавили с 2 кг сплава, содержащего 90% серебра, то получили бы сплав, содержащий 84% серебра. Определите процентное содержание серебра в исходном сплаве.

Решение:

Пусть в сплаве m кг серебра и M кг его общая масса, тогда имеем для каждого из новых сплавов следующее:

1. Для 1-го сплава $\frac{m+3}{M+3} = 0{,}9.$

2. Для 2 сплава $\frac{x}{2} = 0{,}9$ (x – количество серебра в сплаве, с которым сплавляем второй раз), тогда $x = 1{,}8$ и $\frac{m+1{,}8}{M+2}$ =0,84.

Решаем систему:

$$\begin{cases} m + 3 = 0{,}9M + 2{,}7, \\ m + 1{,}8 = 0{,}84M + 1{,}68; \end{cases}$$

$$0{,}9M - 0{,}3 = 0{,}84M - 0{,}12$$

$$0{,}06M = 0{,}18$$

$$M = 3$$

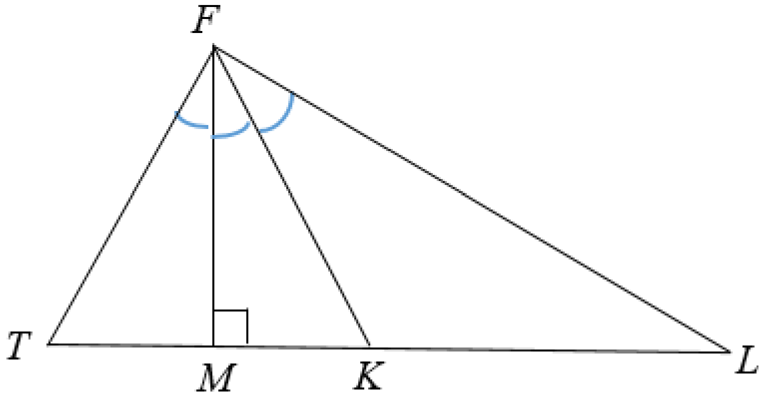
$$m = 2{,}4$$

$$\frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$$

Ответ: 80%.

9.5 *FK* – медиана этого треугольника *TFL*, изображенного на рисунке.

Равные углы отмечены на рисунке. Угол *FML* прямой. Докажите, что треугольник *TFL* является прямоугольным.



Решение:

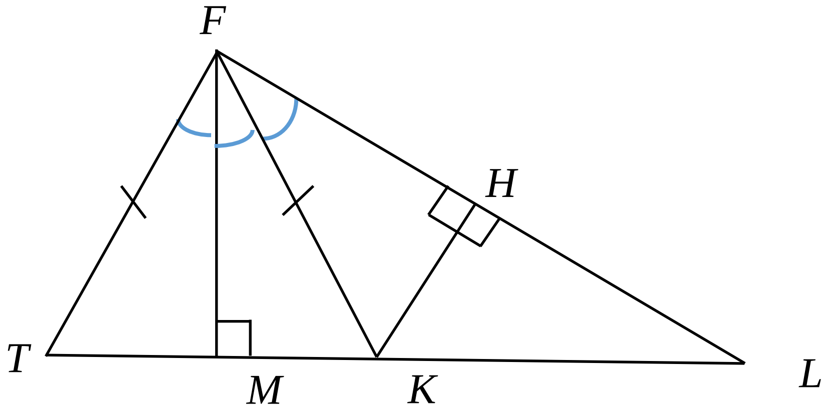
Опустим *KH* – перпендикуляр к *FL*.

Прямоугольные треугольники *FKH* и *FKM* равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, что *MK*=*KH*.

Обозначим, *MK*=*x*, тогда *KH*=*x*, *TM*=*x*, *KL*= *TK*=2*x*. Таким образом, в прямоугольном треугольнике *KHL* катет *KH* в два раза меньше гипотенузы *KL*. Следовательно, угол *L* равен 30^0.

Из прямоугольного треугольника *MFL* угол *MFL* равен 60^0.

Угол *TFL* = $3\cdot(60^0:2)=90^0$.



Дополнительные критерии

9 класс

9.1 Записан только верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи, ставить 1 балл

9.3 Записан только ответ, ставить 0 баллов.
Верная идея решения, связанная с отдельным подсчетом суммы сотен, десятков и единиц, но дальнейшего продвижения нет или не верно определено количество слагаемых, ставить 3 балла.
Вычислительная ошибка при всех верных шагах решения, ставить 5 баллов.

9.4 Записан только верный ответ, ставить 0 баллов.
Верно составлена система уравнений, но не решена или решена не верно, ставить 3 балла.

9.5 Записан только ответ, ставить 0 баллов.
Отмечено, что треугольник TFK равнобедренный, но дальнейшего продвижения нет, ставить 0 баллов.