

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2024-2025 уч.год
9 класс
Решения и ответы

1. Докажите, что уравнение $x^2 - 2023x + 2024a + 2025 = 0$ не может иметь целых корней ни при каком a .

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1 и x_2 . По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2023, \\ x_1 \cdot x_2 = 2024a + 2025. \end{cases}$$

Мы видим, что если числа x_1 и x_2 целые, то их произведение нечетно, поэтому каждый из корней – нечетное число. Но в этом случае сумма должна быть четной, а она нечетна.

2. Докажите неравенство при всех вещественных a, b, c, d

$$(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Решение.

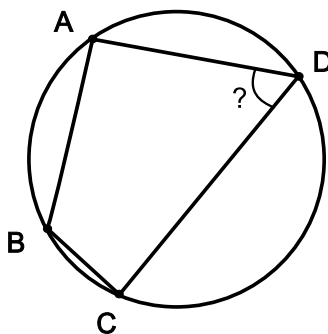
$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Возведение в квадрат можно выполнить, перемножив две суммы, или воспользоваться известной формулой.

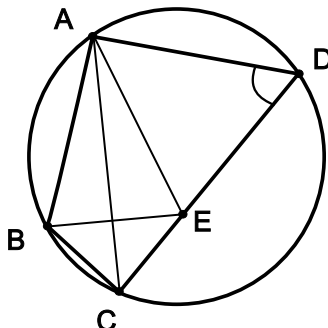
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd &\leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 + c^2 - 2cd + d^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно, все переходы равносильны, исходное неравенство доказано.

3. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, у которого $AB = AD$ и $AB + BC = CD$. Найдите величину угла CDA .



Решение. Отметим на отрезке CD точку E такую, что $DE = AD$. Тогда $CE = CD - AD = CD - AB = BC$, с учетом условия задачи. Получили, что треугольник BCE равнобедренный. Так как хорды AB и AD равны, то равны опирающиеся на них углы: $\angle BCA = \angle ACD$. Отсюда CA – биссектриса угла BCE , следовательно, высота и медиана в равнобедренном треугольнике. Поэтому точка A лежит на серединном перпендикуляре к BE , поэтому $AB = AE = AD = DE$. Итак, треугольник AED равносторонний, и угол CDA равен 60° .



Ответ. 60° .

4. На ярмарке торговали 50 купцов из Москвы и 50 из Нижнего Новгорода. Сначала несколько московских купцов сделали покупку у некоторых нижегородских (каждый купец сделал одну покупку). Затем те нижегородские купцы, у которых московские товар не покупали, сделали по одной покупке у некоторых москвичей, после этого ярмарка закрылась. Докажите, что не менее 50 купцов, торговавших на ярмарке, не продали даже часть своего товара.

Решение. Пусть n – количество нижегородских купцов, у которых москвичи сделали покупку. Тогда $50 - n$ нижегородских купцов сделали покупку у m москвичей. Число москвичей, у которых покупку не делали, равно $50 - m$. Несколько нижегородцев могли купить товар у одного и того же москвича, поэтому $50 - n \geq m$.

Имеем $m + n \leq 50$, число купцов, у которых товар покупали, не больше 50, значит, число купцов, у которых товар не купили, не меньше 50.

5. Написали 2024-значное число. Оказалось, что каждое двузначное число, образованное его соседними цифрами, делится на 17 или на 23. Последняя цифра написанного 2024-значного числа – 1. Найдите первую цифру этого числа.

Решение. Заметим, что все двузначные числа, которые делятся на 17 или на 23, это

$$17, 23, 34, 46, 51, 68, 69, 85, 92$$

Этот набор интересен тем, что каждая цифра от 1 до 9 в разряде единиц встречается в этом наборе ровно один раз. Начнем конструировать данное нам число с последней цифры вперед, к первой.

Так как последняя цифра – это 1, то мы составляем последовательность (от последней цифры влево) 1, 5, 8, 6, 4, 3, 2, 9, 6, 4, 3 и т.д. Получается бесконечная периодическая цепочка

$$\dots 3469234692346851$$

Последние три цифры получившегося числа не повторяются. Начиная с четвертого разряда цифры образуют последовательность с периодом 5. 6 встречается в этой периодической последовательности на 4, 9, 14, 19, 24 . . . местах, т.е. появится и на 2024 месте. Итак, первая цифра написанного числа – 6.

Ответ. 6.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.