

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

9.1. На доске написано число 1000. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число от 1000 до 2018.

Доказательство.

Прибавляя 1, Вася получит все целые числа от 1000 до 2000, из числа 1992 он получит число $2001 = 1992 + 9$. А из чисел 2000 и 2001, прибавляя 2, он уже сможет получить любое число от 2002 до 2018 (и чётное, и нечётное).

9.2. Во время тренировки по теннису в корзине на корте оказалось ровно 30 мячей. В течение следующих 15 минут каждую минуту либо тренер брал из корзины ровно один мяч, либо дети клали в корзину ровно один мяч. Могло ли через эти 15 минут в корзине оказаться ровно а) 21 мяч; б) 20 мячей.

Ответ. а) Да. б) Нет.

Решение.

а) если за 12 минут тренер брал из корзины по одному мячу, а за 3 минуты дети клали по одному мячу, то в корзине окажется $30 - 12 + 3 = 21$ мяч.

б) заметим, что каждую минуту в корзине увеличивается либо уменьшается количество мячей ровно на 1. Значит, каждую минуту меняется чётность текущего количества мячей в корзине. Это означает, что спустя чётное количество минут чётность количества мячей в корзине не меняется, а спустя нечётное количество минут чётность количества мячей в корзине меняется на противоположную. Поэтому из первоначального чётного количества мячей в корзине 30 штук, спустя нечётное количество 15 минут, чётное количество 20 штук оказаться **не могло**.

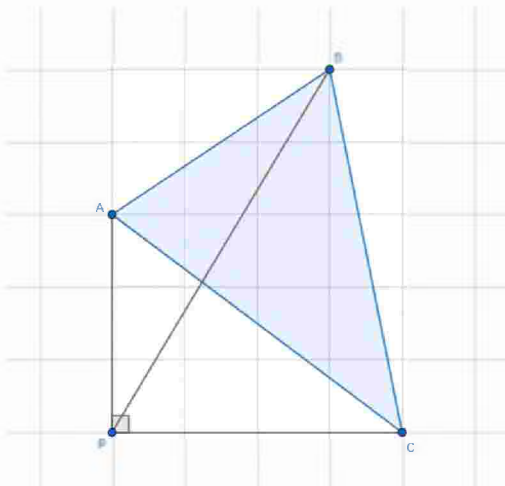
Замечание. Инвариантом процесса добавления и убыли мячей в корзине является чётность разности $k - t$, где k – текущее количество мячей в минуту с номером t . Так как первоначально эта разность $30 - 0$ чётна, а 21 – число нечётное, то ответ отрицательный.

9.3. Какое наибольшее количество клеток на шахматной доске можно отметить так, чтобы центры любых трёх отмеченных клеток либо лежали на одной прямой, либо образовывали треугольник с целой площадью?

Ответ. $n = 32$.

Решение.

Разобьём доску на квадраты 2×2 . В каждом можно отметить не более 2 клеток, поэтому всего не более 32.



Пример: отметим все белые клетки. Докажем, что они подходят. Заметим, что их центры лежат на решетке, состоящей из квадратиков площади 2. Но на квадратной решётке площадь любого треугольника с вершинами в узлах кратна половине площади базового квадрата (это можно доказать так: если одна из сторон треугольника идёт по линии сетки, применяем формулу "половина произведения стороны на высоту", произвольный случай сводится к этому, см. рис.: $S_{ABC} = S_{BCP} + S_{ABP} - S_{ACP}$)

9.4. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 = 3^n$.

Ответ. $(3^k; 2 \cdot 3^k)$ или $(2 \cdot 3^k; 3^k)$ для целого неотрицательного k .

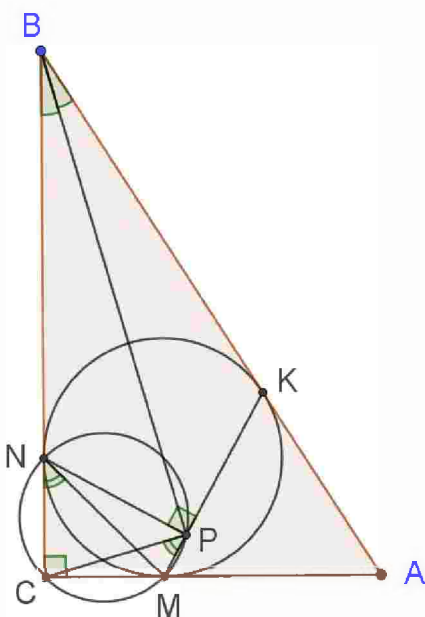
Решение.

Несложно видеть, что $(x+y)^2 > x^2 - xy + y^2 > \frac{(x+y)^2}{9}$ (второе неравенство равносильно тому, что $8x^2 - 11xy + 8y^2 > 0$, но левая часть есть $8(x-y)^2 + 5xy$. Поскольку числа $x+y$ и $x^2 - xy + y^2$ делят $3^n = x^3 + y^3$, каждое из них есть степень тройки. Единственная степень тройки между $(x+y)^2$ и $\frac{(x+y)^2}{9}$ это $\frac{(x+y)^2}{3}$. Итак, $x^2 - xy + y^2 = \frac{(x+y)^2}{3}$, что равносильно $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$, $(x-2y)(y-2x) = 0$. Итак, числа x, y отличаются в два раза, и тогда меньшее из них – степень 3.

9.5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписанная окружность касается сторон AB , AC и BC в точках K, M и N соответственно. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок KM в точке P . Чему может быть равен угол CPM ?

Ответ. 45° .

Решение.



Углы данного треугольника ABC при вершинах A и B обозначим через 2α и 2β соответственно.

Очевидно, $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$.

Заметим, что $AK = AM$, так как являются касательными отрезками ко вписанной окружности. В равнобедренном треугольнике AKM угол при вершине A равен 2α . Значит, углы при основании равны по $90^\circ - \alpha$.

Поэтому $\angle PKB = 90^\circ + \alpha$.

Заметим, что биссектриса BP угла ABC является его осью симметрии. Так как касательные отрезки BK и BN равны, то точки K и N симметричны относительно прямой BP . Значит, $\angle BNP = \angle BKP$.

$\angle KPN = 360^\circ - 2(90^\circ + \alpha) - 2\beta = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 90^\circ$.

Касательные отрезки CM и CN равны. Поэтому прямоугольный треугольник CMN равнобедренный и $\angle CNM = 45^\circ$.

В четырёхугольнике $CNPM$ углы при вершинах C и P прямые. Поэтому этот четырёхугольник вписанный. Значит, вписанные углы CPM и CNM равны.

Итак, $\angle CPM = 45^\circ$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

- 9.1. За верное обоснованное решение – 7 баллов.
- 9.2. Только ответы – 0 баллов.
- а). Правильный пример процесса добавления и убыли мячей в корзине – 1 балл.
- б). Правильные рассуждения с чётностью вне зависимости от того найден или не найден инвариант – 6 баллов.
- 9.3. За верный пример – 4 балла. Оценка – 2 балла.
- 9.4. Дополнительных критериев нет.
- 9.5. а). Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.
- б). Доказана перпендикулярность NP и MK — 3 балла.
- в). Доказана вписанность $CMPN$ — 3 балла.