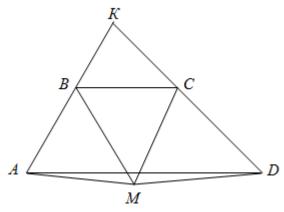
9 класс

- **9.1.** Можно ли найти такие нецелые числа x и y, что оба числа 7x + 6y и 8x + 7y целые?
- **Ответ**. Нельзя. **Решение.** Пусть 7x + 6y = m, 8x + 7y = n, где m и n целые. Рассмотрим эти равенства как систему уравнений. Домножим первое уравнение на 8, а второе на 7. После вычитания получим y = 7n 8m, т.е. y целое число.
- **9.2.** Сколько решений имеет уравнение $x^2 = y^2 + 2023$ в натуральных числах x, y?
- **Ответ:** 3. **Решение**. Данное уравнение равносильно такому: (x-y)(x+y) = 2023. Поскольку 2023 раскладывается на простые множители в виде $2023 = 7 \cdot 17^2$, то, учитывая, что x и y натуральные и x-y>0 (в силу данного уравнения), получаем три системы уравнений $\begin{cases} x-y=1, & \{x-y=7, \\ x+y=2023; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=289; \end{cases}$

 $\begin{cases} x-y=17, \\ x+y=119 \end{cases}$ Каждая из этих систем имеет одно решение в натуральных числах. Укажем эти решения: 1) x=1012, y=1011; 2) x=148, y=141; 3) x=68, y=51.

9.3. Дана трапеция ABCD с углами A и D при основании AD, равными 60° и 45° соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ABM и CDM.

Ответ: $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Решение**. Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD. Так как BM — биссектриса угла ABC, то точка M равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично, точка M равноудалена



от прямых BC и CD как биссектриса угла BCD. Следовательно, точка M равноудалена от прямых AB и CD. Значит, она лежит на биссектрисе угла AKD, а треугольники ABM и CDM имеют равные высоты из вершины M. Поэтому $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{AB}{CD}$. В силу параллельности оснований трапеции BC и AD,

по теореме Фалеса имеем $\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{KD}$, а по теореме синусов для ΔAKD получим $\frac{AK}{KD} = \frac{\sin \angle ADK}{\sin \angle KAD}$.

Таким образом, $\frac{S_{_{ABM}}}{S_{_{CDM}}} = \frac{\sin\ \angle ADK}{\sin\ \angle KAD} = \frac{\sin\ 45^\circ}{\sin\ 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

9.4. На столе лежат 99 монет гербом вверх. За один ход можно выбрать любые n монет и перевернуть их. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вниз, если **a)** n = 5; **б)** n = 95?

Ответ. а) 21; б) 3. Решение.

Приведем

пример на 3 хода. Первым ходом (так же, как в задаче 7.5) получаем 95 минусов и 4 плюса. Следующим ходом переворачиваем монеты с 3-й по 95-ю и две последние, тогда получим $--\underbrace{++...+}_{93}++--$ и последних ходом перевернем все 95 плюсов.

Будем считать, что монеты выложены в ряд. Покажем сначала, что число ходов должно быть нечетным. Для этого представим монеты как числа ± 1 , а ход заключается в смене знака у пяти чисел, герб соответствует (+1), а перевернутая монета (решка) (-1). Рассмотрим число P, равное произведению чисел на столе. Вначале P=+1 и при каждом ходе знак P меняется на противоположный (т.к. меняется знак у пяти сомножителей). В конце должны иметь $P=(-1)^{99}=-1$, но за четное число ходов знак у P не меняется. Далее, очевидно, что за 19 (или менее) ходов можно перевернуть не более $19 \cdot 5 = 95$ монет. А за 20 ходов, как мы только что доказали, перевернуть все монеты тоже нельзя. Осталось привести пример на 21 ход. За 19 ходов, последовательно переворачивая по 5 монет, получим $\frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10000} = \frac{1}{1000} = \frac{1$

Последние 7 монет за два хода переворачиваем так: $___++++$ \Rightarrow +++++-- \Rightarrow -----.

9.5. Существует ли такое натуральное n, что сумма цифр каждого из чисел n и n+1 делится на 100? **Ответ:** существует. **Решение.** Обозначим через s(n) сумму цифр натурального числа n. Если n оканчивается не на 9, то s(n+1)=s(n)+1, и такое n не подходит. Пусть теперь n оканчивается на k девяток, т.е. имеет вид $n=\overline{m99...9}$ где m — натуральное число, оканчивающееся не на 9. Тогда s(n)=s(m)+9k, s(n+1)=s(m)+1. Вычитая эти числа, из условия задачи получим $9k-1=100 \cdot l$ при некотором l. Возьмем l=8 (чтобы 100l+1 делилось на 9, наименьшим l будет l=8). Отсюда 9k=801 и k=801:9=89. Чтобы s(n) делилось на 100, в силу равенства s(n)=s(m)+801 можно положить s(m)=99. Тогда m можно взять, например, 12-значным: m=99...981 (здесь 10 девяток) и значит, n будет 101-значным числом n=99...98199...9 (вначале 10 девяток, затем 10 и 100, в силу равенства 10