



Будем считать, что монеты выложены в ряд. Покажем сначала, что число ходов должно быть нечетным. Для этого представим монеты как числа  $\pm 1$ , а ход заключается в смене знака у пяти чисел, герб соответствует  $(+1)$ , а перевернутая монета (решка)  $(-1)$ . Рассмотрим число  $P$ , равное произведению чисел на столе. Вначале  $P = +1$  и при каждом ходе знак  $P$  меняется на противоположный (т.к. меняется знак у пяти сомножителей). В конце должны иметь  $P = (-1)^{99} = -1$ , но за четное число ходов знак у  $P$  не меняется. Далее, очевидно, что за 19 (или менее) ходов можно перевернуть не более  $19 \cdot 5 = 95$  монет. А за 20 ходов, как мы только что доказали, перевернуть все монеты тоже нельзя. Осталось привести пример на 21 ход. За 19 ходов, последовательно переворачивая по 5 монет, получим  $\underbrace{- - - - -}_{95} + + + +$  (95 минусов и 4 плюса).

Последние 7 монет за два хода переворачиваем так:  $\underbrace{- - -}_{7} + + + + \Rightarrow \underbrace{+ + + + +}_{7} - - \Rightarrow - - - - -$ .

**9.5.** Существует ли такое натуральное  $n$ , что сумма цифр каждого из чисел  $n$  и  $n+1$  делится на 100?

**Ответ:** существует. **Решение.** Обозначим через  $s(n)$  сумму цифр натурального числа  $n$ . Если  $n$  оканчивается не на 9, то  $s(n+1) = s(n) + 1$ , и такое  $n$  не подходит. Пусть теперь  $n$  оканчивается на  $k$  девяток, т.е. имеет вид  $n = \overline{m99\dots 9}$  где  $m$  – натуральное число, оканчивающееся не на 9. Тогда  $s(n) = s(m) + 9k$ ,  $s(n+1) = s(m) + 1$ . Вычитая эти числа, из условия задачи получим  $9k - 1 = 100 \cdot l$  при некотором  $l$ . Возьмем  $l = 8$  (чтобы  $100l + 1$  делилось на 9, наименьшим  $l$  будет  $l = 8$ ). Отсюда  $9k = 801$  и  $k = 801 : 9 = 89$ . Чтобы  $s(n)$  делилось на 100, в силу равенства  $s(n) = s(m) + 801$  можно положить  $s(m) = 99$ . Тогда  $m$  можно взять, например, 12-значным:  $m = 99\dots 981$  (здесь 10 девяток) и значит,  $n$  будет 101-значным числом  $n = 99\dots 98199\dots 9$  (вначале 10 девяток, затем 8 и 1, в конце – 89 девяток), а можно  $m$  взять состоящим из 99 единиц, и тогда  $n$  будет 188-значным числом:  $n = 11\dots 199\dots 9$  (99 единиц и 89 девяток).