МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)

Максимальное количество баллов – 42 балла

Задание 1

Из 100 лотерейных билетов 14% выигрывают. Петя и Вася скупили всю сотню. Среди Петиных билетов 24% выигрышных, среди Васиных 4%. Сколько билетов купил Вася?

Ответ. 50

Решение. Выигрышных билетов 14. Пусть Петя купил x билетов, тогда Вася купил 100-x билетов. У Пети выигрышных 0,24x, у Васи 0,04(100-x).
Получаем уравнение $0{,}24x+4-0{,}04x=14$, откуда $x=50$.

Критерии.
Всего за задание – 7 баллов
Верно построена математическая модель, но дальнейших продвижений нет или ошибочны – **3 балла.**
Верно построена математическая модель, при решении допущена арифметическая ошибка – **6 баллов.**
Приведен только правильный ответ с проверкой – **1 балл.**
Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

Задание 2

Мама собрала новогодние подарки детям – Теме, Белле и Севе. В подарки для каждого из них она положила по две шоколадки: для Темы две плитки темного шоколада, для Беллы две плитки белого шоколада, для Севы две разные плитки – темная и белая. Записки с именами детей на подарках перепутались, при этом теперь ни одна не соответствовала действительности. Как за одно извлечение одной плитки шоколада понять кому какой подарок предназначен? Ответ обоснуйте. (Можно вынимать из подарка одну любую плитку шоколада, не видя какая плитка осталась. По форме плитки не отличаются, упаковка подарков одинаковая.)

Решение. Вытащим плитку шоколада из подарка с надписью «Сева», так как надпись не соответствует его подарку, то он либо Теме, либо Белле, в любом случае там лежат две шоколадки одного цвета.

Пусть это будут плитки белого шоколада, тогда это Беллин подарок, однозначно в Темином подарке не может быть ни две темных, ни две белых плитки, значит там плитки шоколада разного цвета — это Севин подарок, тогда в Беллином Темин.

Если это будут плитки темного цвета, ситуация аналогичная. В Севином Темин подарок, в Беллином Севин, В Темином Беллин.

Критерии.
Всего за задание – 7 баллов
Приведено верное и обоснованное решение – **7 баллов**. В остальных случаях (в том числе любой алгоритм не приводящий к ответу) – 0 баллов.
Замечание. Если начинать с подарка Беллы или Темы, за одно вынимание плитки решить задачу не получится.

Задание 3

Какой цифрой оканчивается число $2024^n + 2024^{n+3}$, где n – натуральное число? Ответ поясните.

Ответ. 0
Решение.
1 способ. $2024^n + 2024^{n+3} = 2024^n\left(1+2024^3\right)$. Первый множитель всегда четный. Последняя цифра результирующего числа в скобках – 5, так как 2024^3 заканчивается на 4 ($4\cdot4\cdot4=\ldots4$), еще прибавляем 1. Поэтому произведение заканчивается на 0.
ИЛИ
2 способ. Заметим, что последовательно возводя 4 в степень, будем получать на конце 4, 6, 4, 6… (цикл длиною 2). Т.е. через раз последняя цифра повторяется, поэтому n+3 и n степени будут иметь на конце разные цифры. Следовательно, две последние цифры будут либо 4 и 6, либо 6 и 4, в обоих случаях в сумме получаем на конце 0.

Критерии.

Всего за задание – 7 баллов

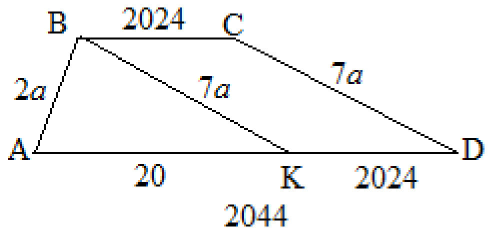
Приведено верное и обоснованное решение – **7 баллов**. Замечена цикличность, но нет дальнейших продвижений **– 1 балл.** В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 4

Найдите периметр трапеции с целочисленными сторонами, если известно, что ее боковые стороны относятся как 7:2, а длины оснований равны 2024 и 2044.

Ответ. 4095.

Решение. Проведем отрезок BK параллельный CD. Получим треугольник ABK и параллелограмм KBCD. Для треугольника ABK напишем два неравенства:



$$\begin{cases} 9a > 20 \\ 2a + 20 > 7a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \dfrac{20}{9} \\ 20 > 5a \end{cases}$$

Единственное целое a, удовлетворяющее условиям, $a=3$. Периметр равен $4064+9a=4095$.

Критерии.

Всего за задание – 7 баллов

За каждую обоснованную и верно полученную оценку $a > \dfrac{20}{9}$ или $a < 4$, приводящую к построению модели, без дальнейших продвижений по **1 баллу**.

Обоснованно получены значения боковых сторон трапеции, но периметр не найден – **6 баллов**.

При обоснованном решении допущена арифметическая ошибка, которая расширила число значений a (получилось больше одного решения системы), при условии всех найденных ответов (среди которых есть правильный) – **5 баллов.**

В случае сужения числа значений a (система не имеет целочисленных решений) вследствие арифметической ошибки, при обоснованном решении – **3 балла.**

Обоснованно получен верный ответ – **7 баллов**.

Задание 5

Найдите количество различных остатков от деления всех простых чисел, больших 15, на 15.

Ответ. 8

Решение. Пусть p – простое число, r – остаток от деления, тогда $p-15k=r$, остатки r не могут в разложении содержать делители 15 - 3 и 5, иначе простое число p тоже делится на эти числа. При делении на 15, остатки принимают значение $0 \le r < 15$. Всего остатков 15, убираем все вышеназванные, остаются 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, остатка 0 быть не может. Все эти остатки получить можно, например, для чисел 31, 17, 19, 37, 23, 41, 43, 29.

Критерии.
Всего за задание – 7 баллов

Найдено условие, что остатки не могут иметь делителей кратных 3, 5 – **1 балл.**

Обоснованно исключены неподходящие остатки, но конкретные примеры подходящих простых чисел не приведены – **3 балла**.

Приведены конкретные примеры подходящих простых чисел, но не показано, что остальные остатки не годятся – **2 балла**.

При правильном ходе решения не рассмотрен один из остатков – **5 баллов**.

В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 6

Десять школ вышли в финал кругового турнира по волейболу (каждый играет с каждым). В этой игре нет ничьих, очки начислялись по старой системе: 2 балла на победу, 1 балл за поражение. Сколько команд после окончания турнира могут утверждать, что выиграли только у тех, кто набрал больше очков, чем они и проиграли только тем, кто набрал меньше?

Ответ 1 или 0.

Решение. **Оценка**. Докажем, что таких команд не более одной. Пусть это не так. Тогда найдутся две команды (А и Б), победившие всех, которые выше их в рейтинге и проигравшие всем, которые ниже их. Заметим, что такая команда не могла иметь одинаковое количество очков ни с одной другой командой, поскольку тогда она не могла бы с ней играть. Поэтому одна из наших команд (например, А) выше в рейтинге, чем другая (Б). Приходим к противоречию: очков у А больше, она выше в рейтинге, но тогда Б должен ее обыграть (а так же и все те команды, которые выше А) и иметь в сумме больше очков.

Пример на 1. Пусть искомая команда пятая в рейтинге и выиграла у первых четырех, проиграв последним пяти, заработав 13 очков.

Первые четыре команды выигрывают по разу друг у друга (например, первая у второй, вторая у третьей, третья у четвертой, четвертая у первой), остальные исходы среди этих команд могут быть любыми. Кроме того, первая четверка команд выигрывают у всех команд, которые ниже нашей пятой команды. Таким образом, каждая из первых четырех команд имеют не менее 12 очков за победы, причем если всего у команды 6 побед, то еще плюс 3 очка за проигрыши (каждая команда сыграет 9 игр). В итоге у каждой из них более 13 очков.

Команды, которые ниже нашей, имеют точно 4 очка за проигрыши первым четырем + 2 очка за выигрыш у нашей команды. Пусть между собой они сыграют так: 2 победы и 2 поражения. Это возможно, например, так: 6-я выигрывает только у 7 и 8, 7-я – только у 8 и 9, 8-я – только у 9 и 10, 9-я – только у 10 и 6, 10-я – только у 6 и 7. В итоге каждая из команд с 6-й по 10-ю заработают 12 очков.

Пример на 0. Первая команда выиграла у всех, вторая у всех, кроме первой, вторая у всех, кроме первой и второй и т.д.

Критерии.
Всего за задание – 7 баллов

Приведено верное и обоснованное решение – **7 баллов**.
Доказано, что команд не может быть более одной – **3 балла**.
Доказано, что команд не может быть более одной и приведен пример только на случай одного ответа - **4 балла**.
Приведены оба примера (на случай 1 команды и 0 команд) – **3 балла**.
Приведен только один пример – **1 балл**.
Комментарий: приведенный пример является обоснованным, если для всех команд указано как завершились игры с их участием (в виде словесного описания, изображения турнирной таблицы, с помощью диаграмм итп).