

**Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2024-2025 учебном году**

9 класс

1. В равенстве $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

Ответ: $||1 - 2| - |4 - 8| - 16| = 19$.

Существуют и другие примеры.

Комментарий. Достаточно привести один пример. Пояснять, как он получен, не требуется.

2. Чебурашка и Гена съели торт. Чебурашка ел вдвое медленнее Гены, но начал есть на минуту раньше. В итоге им досталось торта поровну. За какое время Чебурашка съел бы торт в одиночку?

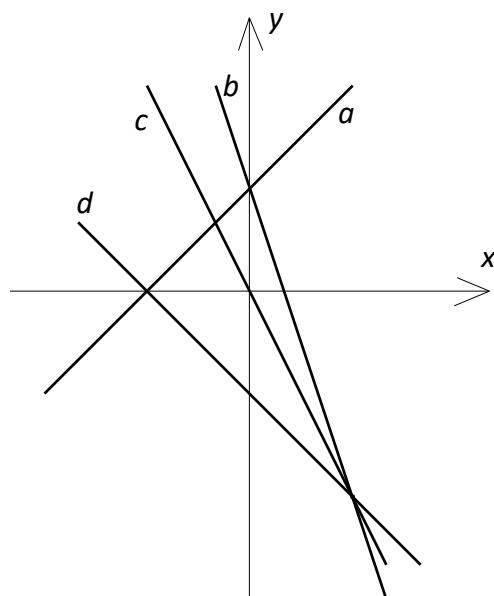
Ответ. За 4 минуты.

Решение.

Первый способ. Если Чебурашка ест вдвое медленнее Гены, то, чтобы съесть столько же торта, сколько съел Гена, ему нужно в два раза больше времени. Значит, то время, которое Чебурашка ел в одиночку (1 минута), составляет половину всего времени, за которое Чебурашка съел половину торта. Таким образом половину торта он съел за 2 минуты, а весь торт съел бы за 4 минуты.

Второй способ. Пусть Гена съедает весь торт за x минут, тогда Чебурашке на весь торт нужно $2x$ минут. Каждому из них досталась половина торта, то есть Гена ел $0,5x$ минут, а Чебурашка x минут. Из условия следует, что $0,5x + 1 = x$, откуда $x = 2$. Значит, Чебурашка съест торт за $2 \cdot 2 = 4$ минуты.

3. Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



- 1) $y = -2x$
- 2) $y = x + 12$
- 3) $y = -3x$
- 4) $y =$

Ответ. 3) $y = -3x + 12$; 4) $y = -x - 12$.

Решение. Из четырёх прямых только прямая a имеет положительный угловой коэффициент, следовательно, она задаётся уравнением 2 и пересекает оси координат в точках $(0; 12)$ и $(-12; 0)$.

Так как уравнение 1 Дима записал полностью, его графиком является прямая, проходящая через начало координат, то есть прямая c .

У прямой b модуль углового коэффициента больше, чем у прямой c , значит, начало уравнения прямой b Дима записал под номером 3. Так как эта прямая проходит через точку $(0; 12)$, она задаётся уравнением $y = -3x + 12$.

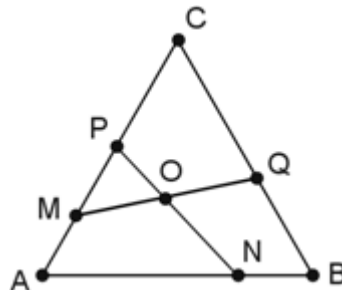
Прямая d проходит через точку $(-12; 0)$ и через точку $(12; -24)$ – точку пересечения прямых b и c , координаты которой легко находятся как решение системы линейных уравнений: $y = -3x + 12$ и $y = -2x$.

Найдём уравнение прямой d . Для этого рассмотрим систему двух уравнений:

$0 = -12k_4 + b_4$; $-24 = 12k_4 + b_4$. Сложив эти уравнения, получим $b_4 = -12$.

Подставив в первое уравнение, получим $k_4 = -1$

4. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ .



Ответ. 60° .

Решение. По условию задачи $AN = a - AM$, следовательно, $AN = MC$.

Аналогично $AP = QC$. Из этих равенств и равенства $\angle A = \angle C = 60^\circ$ следует, что $\angle ANP = \angle CMQ$. Отсюда $\angle ANP = \angle QMC$, $\angle APN = \angle MQC$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ANP + \angle APN = 120^\circ$, поэтому $\angle OMP + \angle OPM = 120^\circ$, а значит, $\angle MOP = 60^\circ$. Углы MOP и NOQ вертикальные, поэтому $\angle NOQ = 60^\circ$.

5. На шахматной доске стоял 21 король. Каждый из королей находился под боем хотя бы одного из остальных. После того как несколько королей убрали, никакие два из оставшихся королей друг друга не бьют. Какое наибольшее число королей могло остаться?
а) Приведите пример исходной расстановки и отметьте убранных королей.
б) Докажите, что большее число королей остаться не могло.

Ответ. б) 16.

Решение. Заметим, что каждый король, снятый с доски, мог бить не более 4 из оставшихся (иначе и некоторые из оставшихся били бы друг друга). Поэтому число оставшихся королей не может превосходить число снятых более чем в 4 раза, то есть не может быть больше 16. Пример приведён на рисунке: серым обозначены короли, которых необходимо убрать.

