Пермский край
2024-2025 учебный год

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 9 КЛАСС

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).
Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

9.1. У Пети было несколько книг, расставленных по 6 полкам. При этом количества книг на полках были последовательными натуральными числами. Во время ремонта Петя снял книги с полок и купил ещё 99 книг. Докажите, что он способен расставить все свои книги (и старые, и новые) по 6 пустым полкам так, что на всех полках будет одинаковое количество книг.

Первое решение. Пусть до ремонта на полке с наименьшим количеством книг находилось $n-2$ книги. Тогда на полках стояло $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ книги. Но значит, всего у Пети до ремонта было $n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3 = 6n+3$ книги. После покупки 99 книг общее количество книг стало равно $6n+3+99 = 6n+102 = 6\cdot(n+17)$. Так как это число делится на 6, то значит, книги можно расставить по 6 полкам так, что на всех полках будет одинаковое количество книг.

Второе решение. Вернём на полки старые книги так, как они стояли до ремонта. Если на полке с наименьшим количеством книг окажется $n-2$ книги, то на полках будет $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ книги.

Поставим на первые пять полок (упорядоченные по увеличению количества книг) соответственно 5, 4, 3, 2 и 1 книгу из новых. После этого на всех полках будет равное количество книг (а именно, $n+3$). Так как осталось $99-15=84=6\cdot 14$ книг, то, добавив по 14 книг на каждую из полок, мы расставим в итоге все книги, и на всех полках будет одинаковое количество книг.

Комментарий. Введена неизвестная, равная количеству книг на одной из полок, и через неё выписаны количества книг на остальных полках — 1 балл.

Доказано, что количество старых книг имеет вид $6k+3$ при некотором целом k — 3 балла.

Баллы по этим двум критериям не суммируются.

9.2. Можно ли расставить первые 15 натуральных чисел на окружности так, чтобы каждое из них было использовано ровно один раз и сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа?

Ответ. Нет.

Первое решение. Допустим, что такая расстановка существует. Так как $9 + 15 = 24 < 25 = 5^2$ и $3^2 < 9 + 1$, то число 9 способно дать в сумме с соседним числом только 4^2. Получается, что оба соседа числа 9 обязаны быть равны $16 - 9 = 7$, тогда как число 7 встречается только один раз. Полученное противоречие показывает, что такой расстановки не существует.

Второе решение. Допустим, что такая расстановка существует. Так как $8 + 15 = 23 < 25 = 5^2$ и $2^2 < 8$, то число 8 способно образовать квадрат, не меньший 9 и не превосходящий 16. Но число 16 мы способны получить только при помощи $16 - 8 = 8$, а у нас нет второго числа 8. Получается, что 8 способно образовать только 9, но тогда оба его соседа обязаны быть равны $9 - 8 = 1$, тогда как у нас есть только единственное число 1. Полученное противоречие показывает, что такой расстановки не существует.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Без доказательства утверждается, что рядом с 8 или 9 может стоять не более одного числа — 3 балла.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC провели биссектрису AF, высоту BH и медиану CN. Оказалось, что FA — биссектриса угла NFH, а прямые HB и NF перпендикулярны. Докажите, что треугольник ABC является равносторонним.

Первое решение. Так как $BH \perp AC$ и $BH \perp NF$, то $AC \parallel NF$. Точка N — середина стороны AB, значит, NF — средняя линия треугольника ABC, и F — середина стороны BC. Тогда AF будет одновременно биссектрисой и медианой треугольника ABC, поэтому $AB = AC$.

Так как AF — биссектриса угла NAH, то $\angle NAF = \angle FAH$. Так как FA — биссектриса угла NFH, то $\angle NFA = \angle AFH$. Значит, треугольники ANF и AHF равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $AN = AH$ и $2AN = 2AH$. Так как N — середина AB, то $2AN = AB$. Поэтому $AC = AB = 2AN = 2AH$, $AH + HC = 2AH$, $AH = HC$. Но тогда BH — высота и медиана в треугольнике ABC, значит, $AB = BC$. Итак, $AB = AC = BC$, и значит, треугольник ABC равносторонний.

Второе решение. Первый абзац повторяет первый абзац первого решения.

Так как AF — биссектриса угла NAH, то $\angle NAF = \angle FAH$. Так как FA — биссектриса угла NFH, то $\angle NFA = \angle AFH$. Значит, треугольники ANF и AHF равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда —

$AN = AH$. Так как HN — медиана прямоугольного треугольника ABH, то $NH = \frac{1}{2}AB = AN$. Значит, $AN = AH = NH$, поэтому треугольник ANH равносторонний и $\angle NAH = 60°$. Итак, треугольник ABC равнобедренный с углом $60°$, и значит, — равносторонний.

Комментарий. Доказано, что $AB = AC$ — 3 балла.

Доказано, что треугольник ANH равносторонний — 3 балла.

9.4. В офисе, представляющем собой клетчатый квадрат 10×10, сидят 100 программистов, ровно по одному в каждой клетке. Каждый программист получает зарплату, где зарплатой может быть любое положительное число, при этом у любых двух программистов зарплаты различны. Программист доволен, если среди его соседей по стороне и по углу клетки зарплату больше его получает не более одного человека. Найдите наибольшее возможное число довольных программистов в офисе.

Ответ. 50.

Решение. Разобьём офис на 25 квадратов 2×2. В каждом квадрате 2×2 не может сидеть более двух довольных программистов. Действительно, пусть в каком-то квадрате сидит хотя бы три довольных программиста. Пусть программист A получает меньшую среди этих троих зарплату. Так как эти трое — соседи, то по крайней мере 2 соседа A получают бóльшую, чем он, зарплату, и он не может быть довольным. Итак, мы получили оценку на количество довольных программистов: их число не превосходит $25 \cdot 2 = 50$.

Пример строится таким образом. Дадим зарплату программистам из первого столбца 1, 2, ..., 10, начиная с первой строчки. Программистам из третьего столбца дадим зарплату 11, 12, ..., 20. Подобным образом продолжим заполнять все нечётные столбцы. То есть программисту в i-м нечётном столбце и j-й строке дадим зарплату $j + 10 \cdot (i - 1)$. Всем программистам из чётных столбцов дадим зарплату, меньшую 1. Тогда для программиста в нечётном столбце зарплату бóльшую, чем он, может получать только тот, кто сидит под ним (если такой человек есть), значит, они все довольны. Несложно понять, что наш пример даёт ровно 50 довольных программистов.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Есть ответ и верный пример — 2 балла.

Доказано, что довольных программистов не более 50 — 5 баллов.

9.5. Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab+bc+cd$, где a, b, c и d — неотрицательные действительные числа и $a+b+c+d=24$.

Ответ. 144.

Первое решение. Заметим, что при любых x и y справедливо неравенство $xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$. Действительно, $\frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geqslant 0$. Также заметим, что в силу неотрицательности d и a выполнено $ad \geqslant 0$.

Поэтому $ab+bc+cd \leqslant ab+bc+cd+da = b(a+c)+d(a+c) = (a+c)(b+d) \leqslant \frac{(a+c+b+d)^2}{4} = \frac{24^2}{4} = 144$.

Осталось отметить, что равенство достигается, например, при $a=d=0$, $b=c=12$. Действительно, тогда $ab+bc+cd = 0\cdot 12 + 12\cdot 12 + 12\cdot 0 = 144$.

Второе решение. Множество всех четвёрок разделим на две группы: в первой будут те, где $b \leqslant c$, а во второй — все остальные.

Для четвёрок из первой группы $ab+bc+cd = ab+bc+c(24-a-b-c) = a(b-c)+24c-c^2 = a(b-c)-(144-24c+c^2)+144 = 144+a(b-c)-(c-12)^2 \leqslant 144$ так как два последних слагаемых не положительны.

Для четвёрок из второй группы $ab+bc+cd = (24-b-c-d)b+bc+cd = 24b-b^2+d(c-b) = 144-(144-24b+b^2)+d(c-b) = 144+d(c-b)-(b-12)^2 \leqslant 144$ так как два последних слагаемых не положительны.

Оценка достигается на примере из первого решения.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Дан ответ и приведена четвёрка чисел, для которой 144 достигается — 1 балл.

Доказана оценка, но не доказано, что она достигается — 6 баллов.

Замечание. Оценка может достигаться не только на приведённом в решении примере. Годится любая четвёрка неотрицательных чисел, в которой либо $a=0$ и $c=b+d=12$, либо $d=0$ и $b=a+c=12$.