**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году**

**9 класс**

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут*

**9.1.** *Набор из трёх ненулевых чисел дважды подставили в качестве коэффициентов квадратного уравнения: сначала в одном порядке, потом в другом. Могло ли оказаться, что в первом случае полученное квадратное уравнение имеет два положительных корня, а во втором — два отрицательных? Ответ обоснуйте.*

**Решение:** Пусть $a$, $b$ и $c$ — числа набора.

Ситуация 1: все они одного знака. Тогда при любом их расположении на месте коэффициентов квадратного уравнения по теореме Виета получится, что произведение корней (если они есть) положительно, а их сумма отрицательна. Значит, оба корня (если они есть) будут отрицательны для всех шести случаев расположения коэффициентов квадратного уравнения.

Ситуация 2: Два числа (не ограничивая общности, можно считать, что это числа $a$ и $b$) одного знака, а одно (число $c$) — другого. Тогда из шести возможных квадратных уравнений $0 = ax^2 + bx + c$, $0 = bx^2 + ax + c$, $0 = cx^2 + ax + b$, $0 = cx^2+bx+a$, $0 = ax^2+cx+b$ и $0 = bx^2+cx+a$ в первых четырёх свободный член и старший коэффициент будут разных знаков; по теореме Виета каждое из этих четырех уравнений будет иметь ровно два корня, но разных знаков. Эти случаи для решения задачи нам неинтересны. А пятое и шестое уравнения, если и будут иметь по два корня, то эти корни будут одного знака, обязательно положительные.

Вывод: нами рассмотрены все возможные ситуации расположения знаков чисел $a$, $b$ и $c$, и во всех этих случаях ответ на вопрос задачи является отрицательным.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ | 7 баллов |
| Верно проанализирован случай, когда среди чисел набора есть числа разного знака | 3 балла |
| Верно разобран случай, когда все числа набора одного знака | 2 балла |
| Верно разобраны некоторые (не все возможные) перестановки коэффициентов (например, только попарные) | 1 балл |
| Ответ без обоснования или с неверным обоснованием, а также иллюстрация верного ответа конечным числом конкретных примеров | 0 баллов |

**9.2.** *При проверке диктанта оказалось, что грубые ошибки у всего класса в сумме составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в три раза больше грубых ошибок и на две больше негрубых, то число грубых ошибок стало бы ровно в 5 раз меньше числа негрубых. Докажите, что по меньшей мере треть класса написала диктант безошибочно.*

**Решение:**

Способ 1. Пусть общее количество допущенных в диктанте грубых ошибок равно $K$. Тогда общее число ошибок не превосходит $4K$, и из них не более $3K$ негрубых. В гипотетическом варианте будет допущено ровно $3K$ грубых ошибок, и ровно $15K$ негрубых, следовательно, дополнительно будет допущено не менее $15K - 3K = 12K$ негрубых ошибок. Так как каждый ученик допустил ровно две дополнительные негрубые ошибки, учеников в классе не меньше $12K : 2 = 6K$. Но учеников, допустивших хотя бы одну ошибку, не больше, чем самих ошибок, то есть не больше $4K$. Значит, доля учащихся класса, допустивших хотя бы одну ошибку, не превосходит

$$\frac{4K}{6K} = \frac{2}{3},$$

то есть по крайней мере треть класса ошибок в диктанте не допустила. Утверждение доказано.

Способ 2. Пусть в классе $n$ учеников, и пусть они в сумме в диктанте сделали $x$ ошибок, из которых $y$ грубых, а $x - y$ негрубых. По условию $y > 0{,}25x$. При изменённой ситуации ученики совершат $3y$ грубых ошибки и $x-y+2n$ негрубых; по условию $3y \cdot 5 = x-y+2n$. Получили систему в целых неотрицательных числах

$$\begin{cases} y > 0{,}25x, \\ 15y = x - y + 2n. \end{cases}$$

Умножив неравенство системы на 16 и исключив переменную $y$ с помощью уравнения, получим $x + 2n > 4x$, откуда $x < \frac{2}{3}n$. Значит, количество учеников, не совершивших ошибку, не меньше, чем $n - x > \frac{1}{3}n$, и их доля в классе больше, чем $\frac{1}{3}$.

Способ 3. Пусть в классе $n$ человек, $A$ число всех грубых ошибок, $B$ — число всех негрубых. В силу условия

$$3A = \frac{1}{5}(B + 2n) \quad \text{и} \quad A > \frac{1}{4}(A + B),$$

то есть $3A > B$. Нам достаточно доказать, что $A + B \leqslant \frac{2}{3}n$. Из неравенства

$$\frac{B + 2n}{5} > B$$

выводим, что $B < 0{,}5n$. Поэтому

$$A = \frac{1}{15}(B + 2n) < \frac{1}{6}n, \quad A + B < \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) n = \frac{2}{3}n.$$

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верное доказательство | 7 баллов |
| Доказано, что количество учеников в классе не менее, чем в 6 раз превосходит количество грубых ошибок | 5 баллов |
| Условие задачи верно записано в виде системы уравнений и неравенств | 3 балла |
| Утверждение проиллюстрировано конкретными примерами (в любом количестве) | 0 баллов |

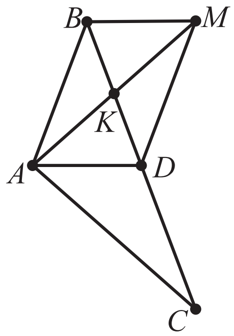
**9.3.** *Дан треугольник $ABC$, в котором $BC = 2AB$. Точка $D$ — середина стороны $BC$, точка $K$ — середина отрезка $BD$. Докажите, что $AC = 2AK$.*

**Решение:**

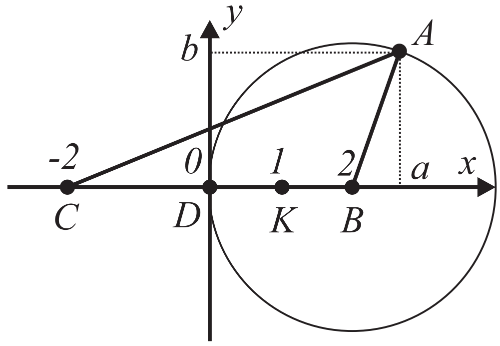
Способ 1. На продолжении отрезка $AK$ за точку $K$ отметим точку $M$ так, что $AK = KM$ (см. рисунок ниже). Четырёхугольник $ABMD$ — параллелограмм (так как его диагонали делятся пополам точкой пересечения), поэтому $DM = AB$. Но тогда $MD = \frac{1}{2}BC = DC$. Кроме того,

$$\angle ADM = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BDA = \angle ADC.$$

Тогда треугольники $ADM$ и $ADC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AC = AM = 2AK$, ч. т. д.




К решению задачи 9.3, способ 1




К решению задачи 9.3, способ 2

Способ 2. Применим координатный метод, для чего введём систему координат. Началом координат выберем точку $D$, а ось абсцисс направим вдоль луча $DB$. Масштаб выберем так, чтобы $DB = 2$ (см. рисунок выше). Тогда координаты точек такие: $B(2;\,0)$, $C(-2;\,0)$, $K(1;\,0)$. Так как $BA = 0{,}5BC = 2$, координаты точки $A(a;\,b)$ удовлетворяют равенству $(a-2)^2 + b^2 = 4$. Нам надо доказать, что

$$2AK = AC \leftrightarrow 4AK^2 = AC^2 \leftrightarrow 4((a-1)^2 + b^2) = (a+2)^2 + b^2 \leftrightarrow b^2 = 4a - a^2.$$

Это верно, так как $b^2 = 4 - (a-2)^2 = 4a - a^2$.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верное доказательство | 7 баллов |
| Выкладки и рассуждения, из которых ход доказательства не виден | 0 баллов |

**9.4.** *Знайка хочет написать на доске 100-значное натуральное число, а затем разбить его десятичную запись в одном месте (не перед цифрой* 0*) на два многозначных числа так, чтобы одно число являлось квадратом другого. Незнайка утверждает, что Знайке этого сделать не удастся. Прав ли Незнайка? Ответ обоснуйте.*

**Решение:** Незнайка, хоть и не блещет математическими способностями, иногда может высказывать и верные суждения. Это как раз тот случай. Докажем это.

Способ 1. Возможны два случая. 1) Меньшее из чисел, полученных Знайкой при разбиении, имеет не больше 33 знаков в своей десятичной записи. Значит, оно строго меньше числа

$$A = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{33 нуля}}.$$

Тогда его квадрат меньше числа

$$A^2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{66 нулей}},$$

то есть этот квадрат не более, чем 66-значный. Но большее из полученных Знайкой чисел имеет в десятичной записи по крайней мере 67 цифр.

2) Меньшее из чисел, полученных Знайкой при разбиении, имеет 34 или больше цифр в своей десятичной записи. Тогда оно не меньше числа

$$A = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{33 нуля}},$$

а его квадрат не меньше числа

$$A^2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{66 нулей}},$$

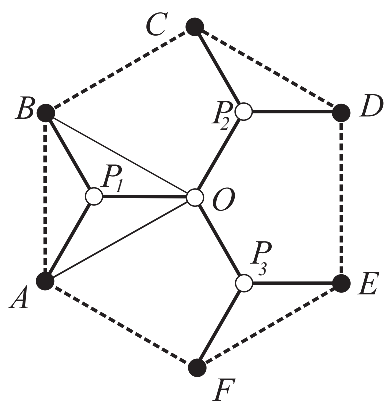
то есть имеет по крайней мере 67 цифр в своей десятичной записи. При этом большее из полученных Знайкой чисел имеет в десятичной записи не больше 66 цифр. В обоих случаях квадрат меньшего числа не может оказаться большим числом. Значит, Знайка не сможет осуществить задуманное.

Способ 2. Предположим, от противного, что Знайке удалось осуществить задуманное. Пусть его меньшее число $X$ оказалось $k$-значным, а большее $Y$ — $(100 - k)$-значным. Тогда $10^{k-1} \leqslant X < 10^k$, поэтому $10^{2k-2} \leqslant X^2 < 10^{2k}$, то есть число $X^2$ или $2k$-значное, или $2k-1$-значное. Если $Y = X^2$, то в первом случае получится равенство $100 - k = 2k$, во втором — $100 - k = 2k - 1$. Оба они не имеют решений в натуральных числах, поэтому наше предположение ошибочно. Противоречие. Незнайка прав.

**Ответ:** Незнайка прав.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ | 7 баллов |
| Верно разобран только один из случаев: а) меньшее число Знайки содержит 33 цифры (или меньше); б) меньшее число Знайки содержит 34 цифры (или больше) | 4 балла |
| Доказано, что квадрат $n$-значного (в десятичной записи) числа содержит либо $2n$ цифр, либо $2n-1$ цифру (достаточно случаев $n = 33$ и $n = 34$) | 2 балла |
| Ответ без обоснования или с неверным обоснованием | 0 баллов |



К решению задачи 9.4

**9.5.** *В вершинах правильного шестиугольника со стороной 1 находятся нефтяные вышки. Требуется построить сеть дорог, чтобы по ним от каждой вышки можно было проехать к любой другой вышке. Обозначим через $S$ минимально возможную сумму длин этих дорог. Докажите, что $S \leqslant 3\sqrt{3}$.*

**Решение:** Достаточно привести пример требуемой сети дорог, сумма длин которых в точности равна $3\sqrt{3}$. Пример приведен на рисунке. Здесь $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, в вершинах которого находятся нефтяные вышки, $O$ — его центр, $P_1$, $P_2$, $P_3$ — центры правильных треугольников $ABO$, $CDO$, $EFO$ (чтобы не загромождать чертёж, на рисунке изображён только треугольник $ABO$). Сеть дорог состоит из 9 прямолинейных участков, длина каждого из которых равна радиусу окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 1.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верный пример с проверкой того, что сумма длин всех дорог не больше $3\sqrt{3}$ | 7 баллов |
| Приведён верный пример, но не проверена, что сумма длин всех дорог не больше $3\sqrt{3}$ | 5 баллов |
| Неверные примеры и/или неверные доказательства | 0 баллов |

**9.6.** *Докажите, что если сумма трёх дробей*

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

*($a$, $b$ и $c$ — действительные числа) равна 1, то одна из этих дробей равна $-1$, а две другие равны 1.*

**Решение:** Условие задачи записывается уравнением

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1.$$

Преобразуем его равносильным образом.

$$c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)=2abc,$$
$$-a^3+a^2(c+b)+a(b^2+c^2-2bc)+b^2c+bc^2-b^3-c^3=0,$$
$$a^2(c+b-a)+a(b-c)^2-(b+c)(b-c)^2=0,$$
$$a^2(c+b-a)+(b-c)^2(a-b+c)=0,$$
$$(c+b-a)(a^2-(b-c)^2)=0,$$
$$(c+b-a)(a-b+c)(a+b-c)=0.$$

Одна из трёх скобок в левой части обязана равняться нулю, без ограничения общности, пусть первая: $a=b+c$. Тогда $a^2=b^2+c^2+2bc$, и вторая дробь равна $-1$. С другой стороны, $b^2=a^2+c^2-2ac$, поэтому третья дробь равна 1, и $c^2=a^2+b^2-2ab$, поэтому первая дробь равна 1.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верное доказательство | 7 баллов |
| Доказано, что условие задачи равносильно тому, что в тройке $(a,b,c)$ одно из чисел равно сумме (или разности) двух других | 5 баллов |
| Рассмотрена конкретная тройка ненулевых чисел, в которой одно число равно сумме двух других | 1 балл |
| Выкладки, не ведущие к решению | 0 баллов |