

9 класс

1. В магазине продают фломастеры. Если вы покупаете меньше 100 фломастеров, то стоимость одного фломастера будет 67 рублей, а если купить фломастеров 100 или больше, то стоимость одного фломастера будет 57 рублей. Например, выгоднее купить 100 фломастеров по 57 рублей, чем 99 фломастеров по 67 рублей. При каком *наименьшем* числе x покупка 100 фломастеров выгоднее, чем покупка x фломастеров по 67 рублей?

Ответ: 86 фломастеров.

Решение. Плата за фломастеры уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число покупаемых фломастеров до 100. Покупка при этом будет стоить $57 \cdot 100 = 5700$ рублей. Обозначим требуемое число фломастеров через x . Тогда x — *наименьшее* натуральное число, для которого верно неравенство $67 \cdot x > 5700$, откуда $x = 86$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Подбором установлено, что покупка 100 фломастеров по 57 рублей выгоднее покупки 86 фломастеров по 67 рублей, — 7 баллов. Решение с арифметическими ошибками — не более 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Группа школьников покупает билеты в театр и кино. Имеющихся денег достаточно для покупки 5 билетов в театр и 11 билетов в кино, но не хватает на покупку 11 билетов в театр и 1 билета в кино. Хватит ли денег на покупку 19 билетов в кино?

Ответ: *хватит*.

Решение. Обозначим стоимость билета в театр через t , а в кино — через k . Тогда имеем из условия

$$5t + 11k < 11t + k \iff 10k < 6t \iff k < \frac{3}{5}t \iff 8k < \frac{24}{5}t < 5t.$$

Отсюда $19k = 11k + 8k < 11k + 5t$, то есть стоимость 19 билетов в кино меньше стоимости 11 билетов в кино и 5 билетов в театр. Значит, имеющихся денег хватит на покупку 19 билетов в кино.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Доказано, что $10k < 6t$ — 1 балл. Обосновано неравенство $8k < 5t$ — ещё 3 балла. Доказано, что $19k < 11k + 5t$, но сделан вывод, что денег не хватит — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. На доске написано 100 положительных чисел. Оказалось, что сумма квадратов любых двух написанных чисел равна сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

Ответ: 4900.

Решение. Сначала докажем, что все написанные числа равны друг другу. Предположим, что среди них есть два неравных числа a и b . Пусть S — сумма всех написанных чисел, c — любое другое написанное число. По условию $a^2 + c^2 = S - a - c$ и $b^2 + c^2 = S - b - c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $a^2 - b^2 = b - a$ или $(a - b)(a + b + 1) = 0$. По предположению $a \neq b$, поэтому $a + b + 1 = 0$, но это равенство невозможно для положительных a и b , противоречие.

Значит, все 100 написанных чисел равны одному и тому же числу a , их сумма равна $S = 100a$. По условию $a^2 + a^2 = S - a - a$, то есть $2a^2 = 98a$, и так как $a \neq 0$, получаем, что $a = 49$, $S = 4900$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Получено равенство вида $a^2 + a = b^2 + b$ — 2 балла. Доказано, что все числа равны друг другу — ещё 3 балла. Доказано, что все числа равны, но ошибочно найдено значение S — снимается 1 балл. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира гроссмейстер О. Бендер устроил сеанс одновременной игры для *некоторых* шахматистов турнира. В результате всего было сыграно 100 партий. Сколько было шахматистов на турнире и сколько шахматистов участвовало в сеансе одновременной игры?

Ответ: 14 шахматистов, из них в сеансе одновременной игры участвовали 9.

Решение. Пусть n — количество шахматистов в турнире, тогда между собой они сыграли $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. Действительно, каждый из них сыграл $(n-1)$ партий, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчёта мы каждую партию посчитали дважды — за одного участника и за другого. Так как было сыграно 100 партий, то $\frac{1}{2} \cdot n(n-1) \leq 100$. Наибольшее n , при котором выполняется это неравенство, равно 14, так как $\frac{1}{2} \cdot 14(14-1) = 91$; в этом случае О. Бендер сыграл $100-91 = 9$ партий, то есть он устроил сеанс с девятью шахматистами. Меньше 14 шахматистов быть не может: если их меньше 14, то между собой они сыграют не больше чем $\frac{1}{2} \cdot 13(13-1) = 78$ партий, и О. Бендер должен сыграть не менее чем с $100 - 78 = 22$ шахматистами, а их не более 14.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что шахматистов не более, чем 14 — 2 балла. Доказано, что шахматистов не менее 14 — ещё 3 балла. Доказано, что в сеансе участвовали 9 шахматистов — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов. Решение с неправильным пониманием условия «Сеанс одновременной игры» — не более 6 баллов. За отсутствие доказательства формулы $\frac{1}{2}n(n-1)$ для подсчёта числа турнирных партий баллы не снижаются.

5. В треугольнике ABC ($AB > AC$) из вершины A провели биссектрису AL и медиану AM . Прямая, проходящая через точку M параллельно AB , пересекает AL в точке D , а прямая, проходящая через L параллельно AC , пересекает AM в точке E . Докажите, что прямые ED и AL перпендикулярны.

Решение. (Рис. 3.) Проведём через точку E прямую, параллельную AB . Пусть она пересекает AL и BC в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников MEQ и MAB , MEL и MAC :

$$MQ:MB = ME:MA = ML:MC,$$

и поскольку $MB = MC$, получаем, что $MQ = ML$. Следовательно, MD — средняя линия треугольника PLQ , и значит, $LD = DP$, то есть ED — медиана треугольника PEL . Из параллельности EP и EL сторонам AB и AC соответственно следует равенство углов:

$$\angle EPL = \angle BAL = \angle LAC = \angle ELP.$$

Значит, треугольник LEP — равнобедренный, и медиана ED является высотой, $ED \perp LP$.

Критерии. Доказано, что $MQ = ML$ — 2 балла. Доказано, что MD — средняя линия треугольника PLQ — ещё 1 балл. Отмечено, что ED — медиана треугольника PEL — ещё 1 балл. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

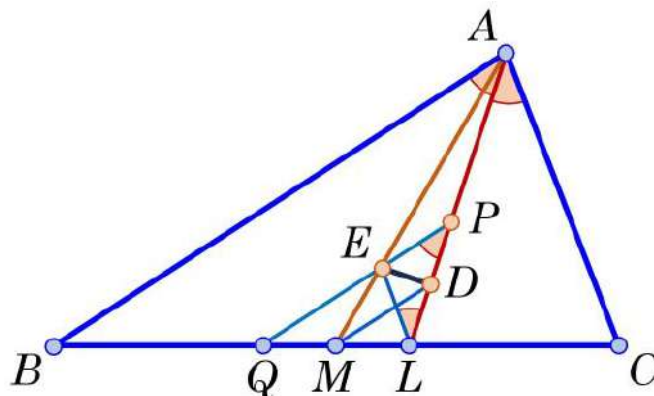


Рис. 3