

**Ключи к заданиям муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников
2024/2025 учебного года
по математике
9 класс**

**Методические рекомендации
для жюри муниципального этапа олимпиады
по оцениванию работ участников**

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
2. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
3. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.
4. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

9.1 Несколько мальчиков пошли в лес за грибами. Один из них нашел 6 грибов, а остальные по 13. В другой раз за грибами отправилось другое число мальчиков. Один из них нашел 5 грибов, а все остальные по 10. Сколько мальчиков собирали грибы в первый и во второй раз, если известно, что в обоих случаях было собрано одинаковое число грибов, причем это число больше 100, но не превышает 200?

Ответ: в первый раз мальчиков было 14, а во второй — 19.

Решение. Пусть в первый раз было $n + 1$ мальчиков, во второй — $m + 1$. Они собрали соответственно $6 + 13n$ и $5 + 10m$ штук грибов. При этом, согласно условию задачи:

$$100 < 6 + 13n = 5 + 10m < 200.$$

Отсюда имеем уравнение:

$$13n + 1 = 10m,$$

с ограничениями:

$$7 < n < 15, \quad 9 < m < 20.$$

В интервале $7 < n < 15$ имеется единственное значение n , при котором $13n + 1$ делится на 10. Это значение $n = 13$. Таким образом, $m = 18$.

Следовательно, в первый раз мальчиков было 14, а во второй — 19. $\square$

9.2 Миллион представлен как сумма двух натуральных слагаемых, каждое из которых делится на сумму цифр другого. Докажите, что слагаемые чётны.

Решение. Обозначим натуральные слагаемые буквами A и B , тогда исходное условие примет вид

$$1000000 = A + B.$$

Количество цифр в каждом из слагаемых не может быть больше шести, поэтому можем представить числа A и B в виде:

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}, \quad B = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6},$$

где $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Числа A и B не могут быть разной чётности, иначе их сумма была бы нечётной.

Предположим, что они нечётные, тогда a_6 и b_6 нечётные.

Рассмотрим суммы цифр, стоящих на одинаковых местах:

$$a_6 + b_6 = 10, \quad a_5 + b_5 = 9, \dots, a_1 + b_1 = 9.$$

Следовательно, при $1 \leq i \leq 5$ одно из чисел a_i и b_i чётное, а другое — нечётное. Другими словами, если среди чисел a_i при $1 \leq i \leq 5$ имеется k нечётных, то среди чисел b_i при $1 \leq i \leq 5$ нечётных будет $5 - k$.

Так как мы предположили, что нечётны оба числа a_6 и b_6 , то суммы

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \quad \text{и} \quad (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$$

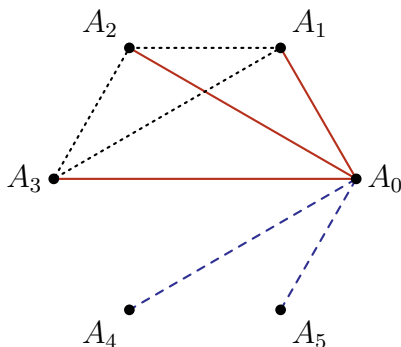
имеют разную чётность, и нечётные числа A и B не могут делиться на то из них, которое чётное. Противоречие.

Оба числа A и B могут быть чётными, например $A = B = 500\,000$. $\square$

Комментарий. Доказательство невозможности нечётных слагаемых — 6 баллов.

9.3 Каждую сторону и каждую диагональ выпуклого шестиугольника покрасили в один из двух цветов — красный или синий. Докажите, что найдётся хотя бы один треугольник, образованный тремя вершинами и отрезками между ними, такой, что все его стороны окрашены в один цвет.

Решение. Обозначим вершины шестиугольника $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Рассмотрим отрезки, соединяющие эти точки. Для наглядности будем обозначать красные отрезки сплошной линией, а синие — пунктирной линией, как показано на диаграмме.



Рассмотрим пять отрезков, исходящих из точки A_0 : $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5$. Каждый из этих отрезков окрашен либо в красный, либо в синий цвет. По принципу Дирихле, среди них обязательно найдутся как минимум три отрезка одного цвета. Без ограничения общности можно предположить, что три из них красные, а именно A_0A_1, A_0A_2 , и A_0A_3 .

Теперь рассмотрим треугольник, образованный точками A_1, A_2 и A_3 . Если хотя бы одна его сторона красная, то существует красный треугольник, то есть все его стороны красные. В противном случае все три стороны треугольника $A_1A_2A_3$ синие, и тогда утверждение задачи также выполняется. $\square$

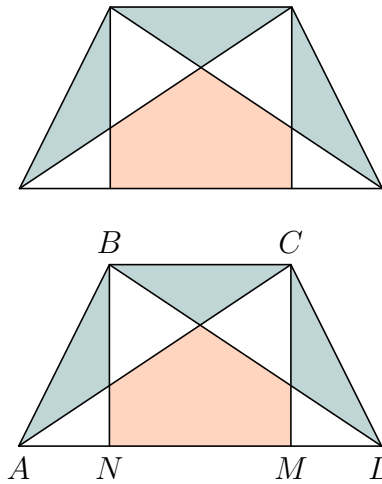
9.4 Квадратная таблица 10×10 заполнена различными натуральными числами от 1 до 100 по порядку так: слева направо первая строка 1, 2, 3, ..., 10, вторая строка 11, 12, 13, ..., 20 и так далее. Затем часть чисел стерли таким образом, что во всех строках и столбцах таблицы осталось ровно по 5 чисел. Найдите сумму оставшихся чисел.

Ответ: 2525.

Решение. Каждое число в таблице представим в виде суммы числа единиц и числа десятков, например, $65 = 60 + 5$. В последнем столбце представим по особому правилу: второе слагаемое (число единиц) сделаем равным не 0, а 10, например, $70 = 60 + 10$. Тогда первые слагаемые будут одинаковы в каждой строке, а вторые в каждом столбце. Подсчитывая суммы оставшихся чисел, будем отдельно суммировать первые и вторые слагаемые. Так как в каждой строке осталось по 5 чисел, то каждое число десятков встретится по 5 раз, и их общее число равно $5(0 + 10 + 20 + \dots + 90)$. Так как в каждом столбце осталось по 5 чисел, то каждое число единиц встретится по 5 раз, и их общее число равно $5(1 + 2 + 3 + \dots + 10)$. Сложив эти числа, получим искомый ответ. $\square$

9.5 В равнобедренной трапеции провели диагонали и высоты из вершин верхнего основания. Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна площади заштрихованного пятиугольника.

Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке.



В треугольнике ACM высота CM равна высоте трапеции, основание $AM = \frac{AD+BC}{2}$ равно средней линии трапеции. Поэтому площадь этого треугольника, как и треугольника BDN , равна половине площади трапеции, и сумма площадей этих треугольников равна площади трапеции. Тогда площадь их общей части, то есть заштрихованного пятиугольника, равна сумме площадей частей, непокрытых ими в трапеции, то есть заштрихованных треугольников. $\square$