9 класс

1. Что больше 15^{15} или 3^{40}?

   Ответ: 3^{40}.

   Решение. $15^{15} < 16^{15} = 2^{60} = 8^{20} < 9^{20} = 3^{40}$.

   Критерии оценки.

   1) В цепочке неравенств допущена хотя бы одна ошибка – 0 баллов.

2. Можно ли в каждую клетку квадратной таблицы 5×5 вписать одно из чисел $-1, 0, 1$ так, чтобы все суммы чисел, стоящих в каждой из строк, каждом из столбцов и на каждой из двух диагоналей были различными?

   Ответ: нельзя.

   Решение. В таблице 5×5 12 строк, столбцов и диагоналей, а возможных сумм всего 11: это целые числа от -5 до 5. Поэтому какие-то две суммы обязательно совпадут.

   Критерии оценки.

   1) Приведен ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Решите уравнение

$$(x^3 - 7x^2 - 5x + 75)^2 + (x^3 - 9x^2 - 5x + 93)^2 = 0.$$

   Ответ: $x = -3$.

   Решение. Из условия следует, что $x^3 - 7x^2 - 5x + 75 = 0$ и $x^3 - 9x^2 - 5x + 93 = 0$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2(x^2 - 9) = 0$, откуда $x = 3$ или $x = -3$. Проверка показывает, что $x = -3$ подходит, а $x = 3$ — нет.

   Критерии оценки.

   1) В ответе помимо правильного корня записан также посторонний корень $x = 3$ — 3 балла.
   2) Корень найден подбором, без обоснования того, что других корней нет — 1 балл.

4. Две прямые пересекаются под углом в 30°. Точка K находится на расстоянии 1 от одной из прямых и на расстоянии $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ от другой. На каком расстоянии находится точка K от точки пересечения прямых?

Ответ: 7 или $\sqrt{13}$.

Решение. Очевидно, внутри каждого из четырёх углов, образованных данными прямыми a и b, есть ровно одна точка, удалённая на расстояние 1 от a и на расстояние $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ от b. Пусть M — искомая точка внутри острого угла, а N — искомая точка внутри тупого угла. Поскольку две точки, лежащие внутри острых углов, симметричны относительно точки O пересечения прямых, и две точки, лежащие внутри тупых углов — тоже, достаточно найти расстояния OM и ON.

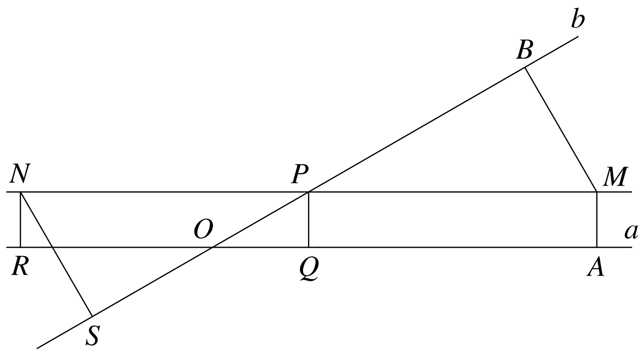

Рис. 4

Пусть P — точка пересечения прямых MN и b, A и B — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые a и b соответственно, Q и R — основания перпендикуляров, опущенных на прямую a из точек P и N соответственно, S — основание перпендикуляра, опущенного на прямую b из точки N (рис. 4). Так как $MN \parallel a$, $\angle BPM = \angle BOA = 30°$. Поэтому из прямоугольного треугольника PBM: $PM = 2BM = 3\sqrt{3}$. Из прямоугольника $PMAQ$: $QA = PM = 3\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника OQP: $PO = 2PQ = 2$ и $OQ = \sqrt{PO^2 - PQ^2} = \sqrt{3}$. Таким образом, $AO = AQ + OQ = 4\sqrt{3}$ и $OM = \sqrt{AM^2 + AO^2} = 7$.

Чтобы найти ON, опустим из точки N перпендикуляр NS на прямую b и заметим, что прямоугольные треугольники NPS и MPB равны по катету и острому углу, откуда $RQ = NP = PM = 3\sqrt{3}$, $RO = RQ - OQ = 2\sqrt{3}$ и $ON = \sqrt{RO^2 + NR^2} = \sqrt{13}$.

Критерии оценки.

1) Приведено вычисление только одного расстояния — 4 балла.

2) Имеются ошибки в вычислениях — минус 1 балл.

5. В каждой из трёх коробок лежит по 50 спичек. Двое играющих по очереди берут любое большее 0 число спичек из любой коробки, но только из одной. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Докажите, что тот, кто ходит первым, может выиграть, как бы ни играл его партнер.

Решение. Первым ходом первый игрок должен забрать все спички из одной коробки. Затем в ответ на каждый ход второго он должен брать столько же спичек, но из другой коробки. Играя таким образом, первый будет каждым своим ходом уравнивать число спичек в коробках, и потому если второй смог сделать свой ход, то сможет его сделать и первый. Так как после каждого хода общее число спичек в коробках уменьшается, игра закончится за конечное число ходов, и, поскольку у первого при описанной стратегии всегда есть возможность сделать ход, то проиграет второй.

Критерии оценки.

1) Не доказана возможность первым игроком сделать свой ход — не более 5 баллов.