Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2024 – 2025 учебный год

9 класс (решения)

1. Вокруг круглого стола сидят 2024 человека, некоторые из них лжецы (они всегда лгут), а остальные рыцари (всегда говорят правду). Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: “Из трёх ближайших ко мне справа людей не менее двух лжецов”. Сколько из сидящих за столом говорят правду?

   Ответ: 1012.

   Решение. Если из каждой пары сидящих рядом людей, один - лжец, а другой рыцарь, то лжецы и рыцари чередуются. Значит, в этом случае ровно половина сидящих говорят правду, то есть 1012 человек.

   Допустим, что нашлась пара соседей-рыцарей. Тогда справа от них сидят два лжеца подряд. Значит, справа от этих лжецов сидят подряд два рыцаря. Таким образом, в этом случае чередуются пары соседей-лжецов и соседей-рыцарей. Снова получается, что рыцари составляют ровно половину от всех сидящих за столом.

2. При каких натуральных n число $2^n - 1$ является кубом или четвертой степенью натурального числа ?

   Ответ: $n = 1$.

   Решение: Пусть $2^n - 1 = a^m$, где $m > 1$. Тогда число a нечетно, $a = 2c + 1$.

   а) Пусть $m = 3$, тогда

   $$2^n = a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

   Так как второй множитель – нечетное число, то он равен 1 (других нечетных делителей у числа 2^n нет). Поэтому $a = 1$ (иначе $a^2 - a + 1 > 1$), $2^n = 2$, $n = 1$.

   б) Пусть $m = 4$. Так как $a^2 = 4c^2 + 4c + 1$ имеет остаток 1 при делении на 4, то это же верно и для $a^4 = (a^2)^2$. Поэтому $2^n = a^4 + 1$ имеет остаток 2 при делении на 4. Такое возможно только при $n = 1$.

3. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, обращающийся в 0 в точках $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = \sqrt[3]{3}$.

   Ответ: $P(x) = (x^2 - 5)(x^3 - 3) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 15$

   Решение. Так как $x_1^2 = 5$, то многочлен $P_1(x) = x^2 - 5$ обращается в 0 в точке x_1. Аналогично, многочлен $P_2(x) = x^3 - 3$ обращается в 0 в точке x_2. Значит, многочлен $P(x) = (x^2 - 5)(x^3 - 3) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 15$ обращается в 0 в точках x_1 и x_2.

4. Поле разделено на 9 прямоугольных участков, площади некоторых из них известны (см. картинку). Найдите площадь всего поля.

	6	
6	4	12
	8	

   Ответ: 99

   Решение. Так как площадь второго участка в первой строке таблицы относится к площади второго участка второй строки таблицы как $6 : 4 = 3 : 2$, то таким же является отношение ширины участков в первой строке к ширине участков второй строки ("шириной"мы называем вертикальный размер на картинке). Поэтому таким же является и отношение площадей соответствующих участков. Значит, площадь первого участка первой строки равна $\frac{3}{2} \cdot 6 = 9$, а площадь третьго участка первой строки равна $\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$. Аналогично, площади участков третьей строки относятся к площадям участков второй строки как $8 : 4 = 2 : 1$, поэтому площадь первого участка третьей строки равна 12, а третьего участка третьей строки равна 24. Складывая, найдем, что площадь всего поля равна

$$9 + 6 + 18 + 6 + 4 + 12 + 12 + 8 + 24 = 99.$$

5. По кругу записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается увеличивать на единицу каждое из двух соседних чисел, а также уменьшать на единицу каждое их двух чисел, стоящих через два друг от друга (“диаметрально противоположных”). Можно ли в результате таких манипуляций сделать все шесть чисел равными?

   Ответ: Нет.

   Решение. Назовём "треугольником"группу из трёх чисел, отстоящих через одно друг от друга. Всего имеется два треугольника, изначально суммы чисел в этих треугольниках различны: 1+3+5=9 и 2+4+6=12. Каждая из двух разрешённых операций изменяет ровно одно число в каждом треугольнике, причём изменяет одинаково. Действительно, любые два соседних числа входят в разные треугольники, и каждые два диаметрально противоположных числа относятся к разным треугольникам. Поэтому, если мы посчитаем сумму чисел в каждом из треугольников, то такие суммы при каждой операции меняются одинаково - либо увеличиваются на 1, либо уменьшаются на 1. Если бы в какой-то момент все 6 чисел стали одинаковыми, то и суммы в обоих треугольниках сравнялись бы, что невозможно.