ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
возрастная группа (9 класс)

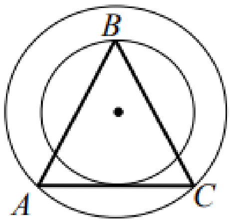
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.
Максимальная оценка – 35 баллов.

ЗАДАНИЯ

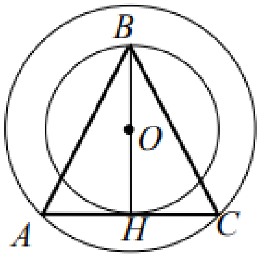
Задание 1.
Семеро друзей зашли в кафе и заказали 3 маленьких стаканчика кофе, 8 средних и 10 больших. Объём маленького стаканчика в два раза меньше объёма среднего, а объём большого – втрое больше объёма маленького. Как друзья должны разделить между собой стаканчики с напитками, чтобы все выпили кофе поровну? Переливать кофе из стаканчика в стаканчик нельзя.

Правильный ответ.
1 маленькая+2 больших – 3 человека; 2 средних + 1 большая – 4 человека.
Решение.
Назовём «нормой» количество кофе в маленьком стаканчике. Тогда суммарно у нас $3+8\times2+10\times3=49$ норм. Т.к. друзей семеро, каждому причитается по 7 норм. Делим так: 1 маленькая+2 больших – 3 человека; 2 средних + 1 большая – 4 человека.
Оценка задания.
Правильный пример с верным ответом – 7 баллов. Получен результат, что каждому требуется 7 «норм», но не показан пример или пример приведён неверно – 3 балла, ошибочный пример или отсутствие примера – 0 баллов.

Задание 2.



На рисунке изображены две окружности с общим центром и равносторонний треугольник ABC. Найдите отношение радиусов окружностей.



Правильный ответ.
$\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Решение.
Обозначим центр окружности O, точку касания малой окружности и стороны AC – H. По рисунку точка O – середина высоты BH. Если сторона треугольника равна $2a$, то высота равна $a\sqrt{3}$ (тогда радиус меньшей окружности $\frac{a\sqrt{3}}{2}$). Треугольник OHC – прямоугольный, его гипотенуза OC является радиусом большей окружности. По теореме Пифагора $OC=a\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Таким образом, отношение большего радиуса к меньшему равно $\sqrt{\frac{7}{3}}$.
Оценка задания.
Верное решение – **7 баллов**. Замечено, что радиус меньшей окружности – половина высоты треугольника, но дальнейших продвижений нет – **1 балл.** Правильно получено соотношение

между стороной треугольника и радиусом любой из окружностей – **2 балла**. Решение верное, но содержит арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход решения – **6 баллов**. Получено отношение высоты к стороне равностороннего треугольника, но не сказано, какое отношение этот факт (это общеизвестный факт) имеет к окружностям – **0 баллов**.

Задание 3.

В Цветочном городе три избирательных участка. Незнайка два года подряд баллотировался на пост мэра. На каждом участке ежегодно подсчитывали, какой процент от всех явившихся избирателей голосовал за Незнайку. В этом году этот показатель на каждом из трёх участков оказался на 20% больше, чем в прошлом году. А в целом по городу – на 20% меньше, чем в прошлом. Приведите пример, как такое могло быть.

Правильный ответ.

Любой верный пример по числу избирателей (один из примеров в решении).

Решение.

Пусть на первом и втором участках в первый год явилось по 10 избирателей, а во второй – по 100. А на третьем – в первый год 100, а во второй 40. А процентов соответственно сначала 10, 10 и 70, а потом 30, 30 и 90.

Тогда по городу процент был 72:120 = 60%, а потом (60 + 36):(200 + 40) = 40%.

Оценка задания.

Любой верный пример, подтверждённый вычислениями – 7 баллов. Верный пример без проверки – 3 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

Задание 4.

В декартовой системе координат построили прямую $y = 20 - x$. Через точку (19;19) провели прямые (в том числе, параллельные осям координат) так, что они разбили плоскость на углы по 9°.

Найдите число, равное сумме абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 20 - x$.

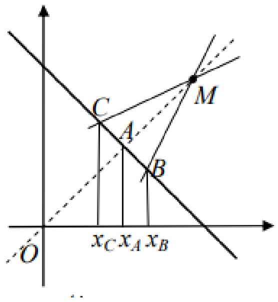
Правильный ответ.

190.

Решение.

1 способ.

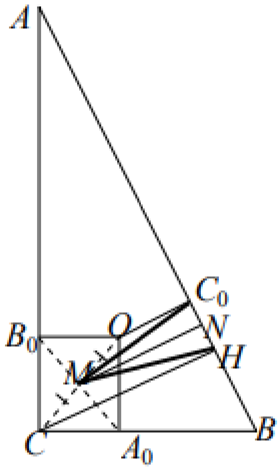
Среди прямых, пересекающих $y = 20 - x$, есть прямая $y = x$. Причём картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (19;19) проведено 180:9=20 прямых, из них 19 пересекают прямую $y = 20 - x$. Для каждой точки на прямой $y = 20 - x$ сумма координат равна 20, значит сумма абсцисс и ординат всех точек равна 20·19=380, тогда сумма абсцисс – вдвое меньше и равна 190.



2 способ.

Через точку (19;19) проведено 180:9=20 прямых, из них 19 пересекают прямую $y = 20 - x$. Пусть прямая $y = x$ пересекает прямую $y = 20 - x$ в точке A, тогда x_A=10. Остальные 18 прямых разбиваются на пары, пересекающие прямую $y = 20 - x$ в симметричных точках B и C

(треугольники MAB и MAC равны по катету и острому углу). Тогда $x_B + x_C = 2x_A = 20$. Сумма абсцисс всех точек пересечения равна 10+9·20=190.



Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**. Допущена ошибка при подсчёте количества прямых, проходящих через точку (19;19): 360:9=40, все остальные рассуждения верные – **4 балла**. Обосновано, что картинка симметрична относительно прямой $y = x$, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 5.

Натуральное число называется хорошим, если его можно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что любое хорошее число, большее 6, можно представить в виде суммы хорошего числа и числа, которое в 3 раза больше хорошего числа.

Решение.

Утверждение задачи означает, что для любого натурального $a>2$ можно подобрать натуральные x, y так, что будет выполняться равенство

$a(a+1)=x(x+1)+3y(y+1) \Leftrightarrow (a-x)(a+x+1)=3y(y+1)$. Для выполнения полученного равенства достаточно, чтобы выполнялась хотя бы одна из двух систем:

$$\begin{cases} a+x+1=3y \\ a-x=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a}{2} \\ x=\dfrac{a}{2}-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a+x+1=3y+3 \\ a-x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a+1}{2} \\ x=\dfrac{a-1}{2} \end{cases}.$$

Первая система показывает, что нужные натуральные числа можно подобрать при любом чётном $a>2$. Вторая система показывает, что нужные натуральные числа можно подобрать при любом нечётном $a>1$.

Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**. Утверждение задачи доказано только для чётных или только для нечётных значений a – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.