

10 класс

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$. Докажите, что верно неравенство:

$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2. Докажите, что среди произвольных десяти различных двузначных чисел можно выделить две разные группы чисел с одинаковой суммой.

5. Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BP и CQ , точка T – точка пересечения высот треугольника PAQ . Оказалось, что $\angle CTB = 90^\circ$. Найдите в градусах величину $\angle BAC$.

5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – квадратические функции. Известно, что

$$|f(1)| + |g(1)| + |f(2)| + |g(2)| = 0 \text{ и } \frac{f(3)}{g(3)} = 2024.$$

Найдите $\frac{f(2023)}{g(2023)}$.