

10 класс

1. Есть 12 карточек с числами $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$. Из них составляют 6 дробей, у которых числитель и знаменатель одна из карточек. При этом каждую из карточек используют ровно один раз. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма таких дробей?
2. Путь от города А до города В идёт по шоссе. По шоссе можно ехать со скоростью ровно 90 км/ч, но иногда шоссе проходит по населённым пунктам – там можно ехать со скоростью ровно 60 км/ч. Известно, что ровно половина расстояния от А до В идёт по населённым пунктам. Начинаящий водитель Аркадий всё перепутал: ехал со скоростью 90 км/ч по населённым пунктам и 60 км/ч – на остальных участках, пока ровно на середине пути его не остановил капитан ГИБДД и доходчиво объяснил ему правила. Аркадий сразу всё понял и остаток пути ехал по правилам. Известно, что весь путь Аркадий проехал за 4 часа. Сколько времени из этих 4 часов он ехал по правилам?
3. Дан параллелограмм $ABCD$, его диагонали пересекаются в точке O . Описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке P , а диагональ AC — в точке Q . Описанная окружность треугольника OQD пересекает сторону CD в точке R . Известно, что $BP : PC = CR : RD = 1 : 2$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.
4. В стране восемь городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что любые четыре города можно посетить, начав в одном из них и проехав по трём дорогам. Какое наименьшее количество дорог может быть в этой стране?
5. Дан три натуральных числа a, b, c таких, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что среди чисел a^3, b^3, c^3 найдутся два, у которых одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.