Всероссийская олимпиада школьников 2024-2025 учебный год
Муниципальный этап
Математика
10 класс
Продолжительность – 235 минут
Максимальный балл – 35

Задача №1 (7 баллов)

Найдите все такие натуральные $n \geq 3$, что все целые числа от 1 до n можно расставить по окружности так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел делилась на следующее за ними по ходу часовой стрелки число.

Задача №2 (7 баллов)

Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучки, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Задача №3 (7 баллов)

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_0, BB_0, CC_0. Пусть A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2— соответственно проекции точек A_0, B_0, C_0 на не содержащие эти точки стороны треугольника ABC. Докажите, что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$

Задача №4 (7 баллов)

Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число 2a, либо число a + 1, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача №5 (7 баллов)

Возрастающая арифметическая прогрессия содержит два натуральных числа и квадрат меньшего из них. Докажите, что она содержит и квадрат второго числа.