

11 класс

1. Докажите, что числа x, y, z имеют один и тот же знак тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

$$xy + yz + zx > 0 \text{ и } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} > 0.$$

2. Пусть $ABCD$ равносторонняя трапеция, $AD=BC$, $AB \parallel CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O , а точка M является серединой стороны AD . Окружность, описанная около треугольника BCM , во второй раз пересекает сторону AD в точке K . Докажите, что $OK \parallel AB$.

3. Докажите, что среди произвольных десяти различных двузначных чисел можно выделить две разные группы чисел с одинаковой суммой так, что ни одно из чисел не может принадлежать обеим группам одновременно.

4. Решите неравенство:

$$\log_{1-\pi \sin^2 x \cos^2 x}(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

5. Постройте график функции:

$$y = \sqrt{4 \sin^4 x - 2 \cos 2x + 3} + \sqrt{4 \cos^4 x + 2 \cos 2x + 3}.$$