

11 класс

1. Есть 18 карточек с числами $2, 4, 8, \dots, 2^{18}$. Из них составляют 9 дробей, у которых числитель и знаменатель одна из карточек. При этом каждую из карточек используют ровно один раз. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма таких дробей?
2. Полоска из 2024 клеток заполнена нулями. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход разрешается любой ноль заменить на единицу. Но после каждого хода все блоки из нулей должны быть разной длины и все блоки из единиц тоже (при этом блок из нулей и блок из единиц могут иметь одинаковую длину). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Покажите, что один из игроков может победить, как бы ни играл соперник. (Блоком из единиц называется несколько подряд стоящих единиц таких, что слева и справа от них стоит 0, либо край полоски)
3. Выписали n наименьших собственных делителей некоторого натурального числа. Затем каждый делитель увеличили на 1 и получились n наименьших собственных делителей некоторого другого натурального числа. При каком наибольшем натуральном n такое возможно? (Собственным делителем натурального числа N называется всякий его натуральный делитель отличный от 1 и от N)
4. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M соответственно так, что $\angle BLK = \angle CLM = \angle BAC$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P . Докажите, что четырехугольник $AKPM$ – вписанный.
5. Есть клетчатая полоска длины 2024. Можно выбрать любую пустую клетку и записать в неё число — количество соседних по стороне клеток, в которых уже стоят числа. (Например, если бы была полоска длины 4, и сначала записали число в 3-ю клетку, потом в 1-ю, потом во 2-ю, потом в 4-ю, то получилась бы последовательность 0, 2, 0, 1) Сколько разных последовательностей из 2024 чисел можно получить?