Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2024-2025 уч.год

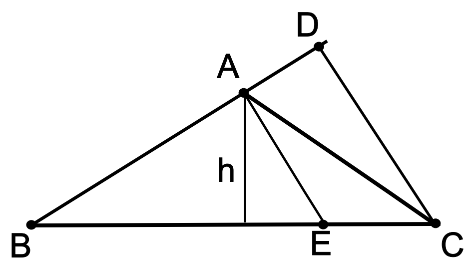
11 класс

1. Найдите все такие целые числа n, для которых число $\dfrac{n^2+1}{n+2}$ будет целым.

2. Пусть x_1, x_2, x_3 – длины сторон некоторого треугольника, $f(x)$ – какой-то квадратный трехчлен. Известно, что $f(x_1) = f(x_2 + x_3)$. Докажите, что $f(x_2) = f(x_1 + x_3)$.

3. Компьютер заполнил таблицу 5×5 нулями. Далее компьютер выполнил серию шагов: за один шаг выбирал две соседние ячейки по вертикали или по горизонтали и либо прибавлял по единице к числам в выбранных ячейках, либо вычитал по единице из этих чисел. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах таблицы равны между собой. Докажите, что компьютер выполнил четное число шагов.
(*Соседние ячейки имеют общую сторону по горизонтали или по вертикали. Сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке и т.д.*)

4. Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = AC$). Точка D лежит на продолжении стороны BA за точку A, точка E лежит на BC; при этом отрезки AE и CD параллельны. Длина высоты, проведенной из точки A на сторону BC, равна h. Докажите неравенство
$$BC \cdot CD \geqslant 4h \cdot CE$$
В каком случае достигается равенство?



5. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ – положительные величины, причем
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$
Известно, что если поменять местами любую пару слагаемых a_k и b_m, то знак неравенства изменится на противоположный:
$$a_1 + a_2 + \ldots + b_m + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + a_k + \ldots + b_n$$
Найдите все n, при которых такое возможно.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!