

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (11 класс)

11.1. Даны ненулевые числа a, b, c, d такие, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{c}{b}$ и

$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$. Верно ли, что тогда также $\frac{d}{c} + \frac{a}{b} = \frac{d}{b} + \frac{a}{c}$ и $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{c}$?

11.2. Петя придумал три различных иррациональных числа и записал на доске все возможные попарные суммы этих чисел. Могло ли получиться так, что Петя записал только рациональные числа?

11.3. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A провели прямую, параллельную O_1O_2 . Эта прямая вторично пересекала окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D . Пусть E – середина отрезка CD . Доказать, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$.

11.4. В таблицу с 45 строками и 30 столбцами записали все *различные* числа от 1 до 2024, которые *не делятся на 3*. При этом оказалось, что в любом квадрате с размерами 2×2 и в любом прямоугольнике с размерами 2×3 сумма чисел *делится на 3*. Верно ли, что найдется квадрат с размерами 3×3 , в котором сумма чисел тоже делится на 3?

11.5. Две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 - cx - d$, касаются в некоторой точке. Доказать, что точка касания есть середина отрезка с концами в вершинах этих парабол.