

8 класс

1. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству

$$x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 2xy + x^2 = 0.$$

2. Муж с женой поехали на машине в санаторий, наметая преодолеть весь путь с постоянной скоростью. Однако, проехав $1/3$ дороги, они решили заправить машину, и пробыли на АЗС 10 минут. Продолжив движение, они увеличили скорость на 30% и надеялись успеть в санаторий даже раньше предполагаемого времени. Однако, отъехав от заправки на расстояние $1/12$ всего пути, они вспомнили, что забыла там кошелек, вернулись обратно, забрали кошелек и тотчас же снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать в санаторий точно в изначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до санатория?
3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, произведение которых на 2024 больше их суммы?
4. Пять девушек-математиков решили сравнить гардеробы. Оказалось, что платьев у любых двух девушек не поровну, но их количества отличаются в целое число раз. Девушки договорились, что если у каких-то двоих отношение количеств платьев окажется числом простым, то девушка, у которой платьев больше, дарит утюг той, у которой их меньше (одна девушка может и подарить, и получить в подарок несколько утюгов). Сколько утюгов всего могло быть подарено?
5. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N, служащие серединами сторон BC и CD соответственно, а на продолжении отрезка MN за точку M – точка E. При этом оказалось, что $EM = MN$, $BN = BC$. Докажите, что и $AC = ED$.
6. Найдите количество 2024-значных натуральных чисел, десятичная запись которых содержит хотя бы одну цифру 7 и хотя бы одну цифру 8.