Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап 2024-2025 учебного года

9 класс

1. Алиса оказалась в стране чудес и встретила Чеширского Кота, который предложил ей сыграть в загадочную игру. У Алисы есть мешочек с монетками. Если монеток чётное число, Алиса должна отдать половину коту. Если нечётное – кот добавляет ей ещё 5 монеток. Игра продолжается до тех пор, пока у Алисы не останется всего одна монетка. Алиса не может отказать Чеширскому Коту и не сыграть с ним в его игру, но в тоже время Алисе нужно спешить на завтрак к Белому кролику. Помогите Алисе определить, при каких начальных количествах монеток игра завершится через конечное количество ходов.

2. Для уравнения

$$x^2 - 2027^{2025}x + 2025^{2027} = 0$$

выясните, имеет ли оно целый корень. Если целый корень есть, найдите его, если целых корней нет - докажите это.

3. Семеро друзей обсуждают, как провести вместе выходные. У них есть три варианта - поездка в горы, квест и пейнтбол. Они решили бросить жребий по следующему правилу: каждый из друзей случайным образом выбирает один из трех вариантов. Затем все голоса подсчитываются. Вариант считается принятым, если его выбрали более 50% человек. Найти вероятность того, что один из вариантов будет принятым.

4. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N - середины сторон BC и CD соответственно, на продолжении отрезка MN за точку M отмечена точка E. При этом оказалось, что EM = MN, BN = BC. Докажите, что EN=AN.

5. На столе лежит $2n$ шаров, где n- натуральное число, большее 1. В каждый из $2n$ шаров написали какое-то число. Для любого разбиения шаров на n пар верно, что найдутся две пары с одинаковой суммой. Докажите, что существует хотя бы четыре шара с одинаковыми числами.

6. Докажите, что неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b$$

справедливо для любых неотрицательных чисел a, b, c.