

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения - 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- Не спеша, внимательно прочитайте задания;
- Не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- Задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- После выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Максимальная сумма баллов – 35.

9.1. На доске написано десять чисел. Разрешается выбрать любые три из них (в любом порядке) и прибавить к первому из них число 1, ко второму – число 3, к третьему – число 6. Получившиеся три числа записываются на доску вместо трех выбранных. С новым набором из десяти чисел проделывают аналогичные действия и т.д. Можно ли за несколько шагов получить набор из десяти равных чисел, если первоначально на доске были написаны числа 1, 2, 3, ..., 9, 10?

9.2. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

(Указание: Площадь круга радиуса R находится по формуле: $S = \pi R^2$)

9.3. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а боковая сторона равна 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найдите длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

9.4. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:

1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина – на третий;

2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.

На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий?

9.5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^3 y^5 = 13^{50} \cdot 6^{50} \cdot 10^{33}?$$