

9 класс

1. Маша утверждает, что её любимое число состоит из пяти различных цифр, причём сумма каждых двух из них не заканчивается на цифру, совпадающую с какой-то из остальных цифр числа. Могут ли слова Маши быть правдой? (Если могут, приведите пример такого числа и объясните, почему оно подходит. Если не могут, объясните, почему такого числа не существует)
2. Река течёт из города А в город В. В реке плавает щука, а по берегу реки ползает рак. Если рак выползет из города А навстречу щуке, которая одновременно выплывет из города В, то они встретятся через полтора часа. Если же, наоборот, щука выплывет из А, а рак одновременно выползет из В, то они встретятся через час. Через сколько времени они бы встретились, если бы течения в реке не было?
3. Про натуральные числа a , b и c известно, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(a, c) - \text{НОД}(b, c) = a + b + c$. Докажите, что какое-то одно число делится на какое-то другое.
4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X так, что $AB = BX$. Точка E такова, что B — середина отрезка XE . Лучи AX и EC пересекаются в точке F . Докажите, что прямые BX и DF перпендикулярны.
5. В круг встали 33 человека, каждый из которых рыцарь или лжец. (Рыцари это те, кто всегда говорит правду, лжецы это те, кто всегда врут.) Сначала каждого спросили: «Кто твой сосед справа?». Было получено N ответов «Рыцарь». Потом каждого спросили: «Кто человек, стоящий через одного справа от тебя?». Было снова получено N ответов «Рыцарь». Потом каждого спросили: «Кто человек, стоящий через два справа от тебя?» И снова получилось N ответов «Рыцарь». И так далее, каждый раз получалось N ответов «Рыцарь». (В итоге каждому было задано по 32 вопроса.) Чему может быть равно N ?