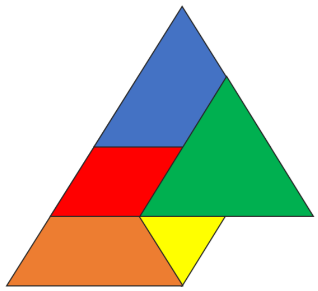
Всероссийская олимпиада школьников по математике

школьный этап 2024-2025

Максимальное количество баллов — 8

5 класс

1. Вариант 1. На доску последовательно были наклеены равные цветные треугольники

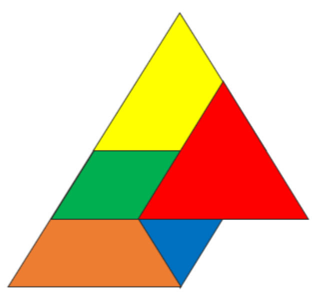


Какой треугольник был наклеен третьим по счету?

Ответ. красный

Решение. Будем рассуждать с конца. Последним был наклеен зеленый треугольник, предпоследним мог быть только синий. Желтый и оранжевый треугольники перекрывается красным. Значит красный был третьим с конца и одновременно третьим с начала.

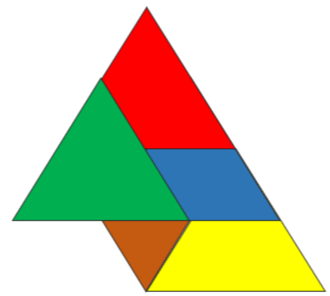
Вариант 2. На доску последовательно были наклеены равные цветные треугольники



Какой треугольник был наклеен третьим по счету?

Ответ. зеленый

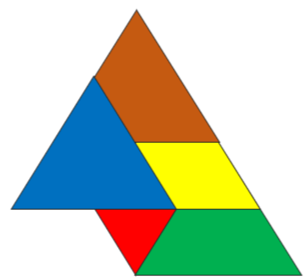
Вариант 3. На доску последовательно были наклеены равные цветные треугольники



Какой треугольник был наклеен третьим по счету?

Ответ. синий

Вариант 4. На доску последовательно были наклеены равные цветные треугольники



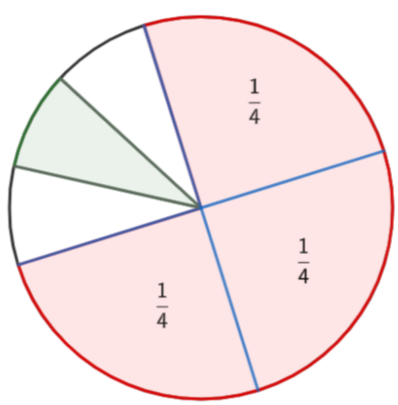
Какой треугольник был наклеен третьим по счету?

Ответ. желтый

2. Вариант 1. В Сириусе каждый четвертый житель хотя бы один раз в день пользуется самокатом. Среди тех, кто воспользовался самокатом, каждый третий воспользовался им хотя бы дважды. Какая часть жителей пользуется самокатом не менее двух раз в день?

Ответ. 1/12

Решение.



Представим себе всех жителей Сириуса в виде круга (см. рисунок). Рассмотрим его четверть – тех, кто пользуется самокатом хотя бы один раз в день. Эту часть разделим на 3 равные части и получим тех, кто пользуется самокатом хотя бы дважды (выделено зеленым цветом на рисунке). Зеленых частей в круге 12, так как в каждой четверти круга их 3. Значит количество жителей, пользующихся самокатом не менее двух раз в день 1/12 от общего числа.

Вариант 2. В Сириусе каждый третий житель хотя бы один раз в день пользуется самокатом. Среди тех, кто воспользовался самокатом, каждый третий воспользовался им хотя бы дважды. Какая часть жителей пользуется самокатом не менее двух раз в день?

Ответ. 1/9

Вариант 3. В Сириусе каждый третий житель хотя бы один раз в день пользуется самокатом. Среди тех, кто воспользовался самокатом, каждый пятый воспользовался им хотя бы дважды. Какая часть жителей пользуется самокатом не менее двух раз в день?

Ответ. 1/15

Вариант 4. В Сириусе каждый второй житель хотя бы один раз в день пользуется самокатом. Среди тех, кто воспользовался самокатом, каждый пятый воспользовался им хотя бы дважды. Какая часть жителей пользуется самокатом не менее двух раз в день?

Ответ. 1/10

3. Вариант 1. В магазине имеются одинаковые шарики для настольного тенниса и проводится серия акций:
1) заплатите за 5 и получите 6 шариков
2) заплатите за 11 и получите 12 шариков
3) заплатите за 14 и получите 18 шариков
4) заплатите за 21 и получите 24 шарика
5) заплатите за 31 и получите 36 шариков.
Выберите самую выгодную акцию, то есть ту, при которой стоимость одного шарика получается самой низкой.

Ответ. 3)

Решение. Если воспользоваться первой акцией, то чтобы купить 36 шариков нужно будет заплатить за 30. Чтобы купить 36 шариков, используя вторую акцию нужно будет заплатить за 33. По условиям третьей акции, приобрести 36 шариков можно будет заплатив за 28. Получается, что среди акций 1), 2), 3), 5) – самая выгодная 3).

Осталось сравнить условия 3) и 4) акций.

Попробуем купить 72 шарика. По условиям 3) акции мы заплатим за 56, а по условиям 4) акции – за 63. Получается, что 3) акция самая выгодная.

Вариант 2. В магазине имеются одинаковые шарики для настольного тенниса и проводится серия акций:
1) заплатите за 29 и получите 36 шариков.
2) заплатите за 21 и получите 24 шарика
3) заплатите за 15 и получите 18 шариков

4) заплатите за 10 и получите 12 шариков
5) заплатите за 5 и получите 6 шариков
Выберите самую выгодную акцию, то есть ту, при которой стоимость одного шарика получается самой низкой.

Ответ. 1)

Вариант 3. В магазине имеются одинаковые шарики для настольного тенниса и проводится серия акций:
1) заплатите за 5 и получите 6 шариков
2) заплатите за 11 и получите 12 шариков
3) заплатите за 15 и получите 18 шариков
4) заплатите за 22 и получите 24 шарика
5) заплатите за 29 и получите 36 шариков.
Выберите самую выгодную акцию, то есть ту, при которой стоимость одного шарика получается самой низкой.

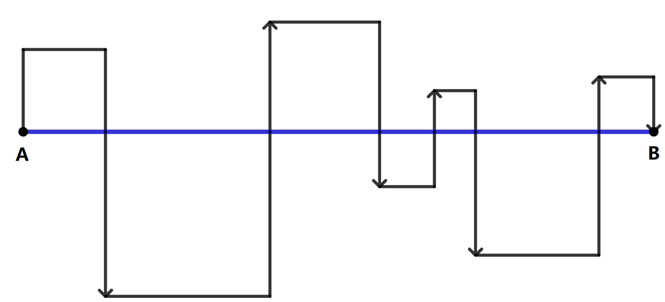
Ответ. 5)

Вариант 4. В магазине имеются одинаковые шарики для настольного тенниса и проводится серия акций:
1) заплатите за 31 и получите 36 шариков.
2) заплатите за 19 и получите 24 шарика
3) заплатите за 16 и получите 18 шариков
4) заплатите за 10 и получите 12 шариков
5) заплатите за 5 и получите 6 шариков

Выберите самую выгодную акцию, то есть ту, при которой стоимость одного шарика получается самой низкой.

Ответ. 2)

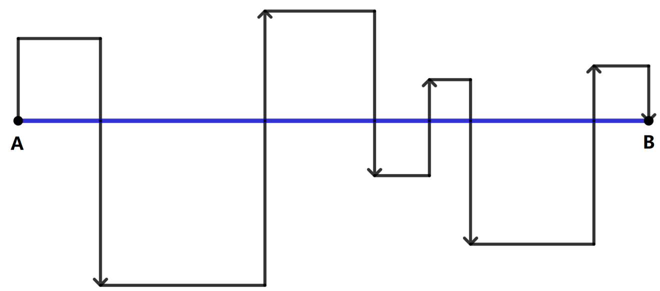
4. Вариант 1. Вася решил прогуляться по городу. Вместо того, чтобы идти по прямой улице, соединяющей точки A и B, Вася обходил квадратные кварталы города по стрелкам, как показано на рисунке. Длина его маршрута в итоге составила 6 км. Чему равно расстояние между точками A и B по прямой? Ответ выразите в километрах.



Ответ. 2

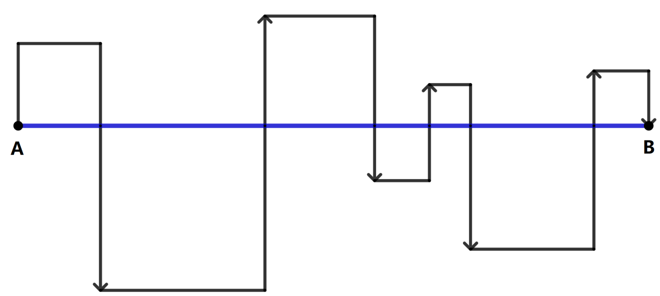
Решение. Каждый раз Вася, обходя квадратные кварталы города, проходил 3 стороны квадрата. Двигаясь по прямой, оно бы прошел только одну сторону. Таким образом, он прошел расстояние в 3 раза большее, чем прошел бы двигаясь по прямой. Поэтому всего он прошел $6 : 3 = 2$ километра.

Вариант 2. Вася решил прогуляться по городу. Вместо того, чтобы идти по прямой улице, соединяющей точки A и B, Вася обходил квадратные кварталы города по стрелкам, как показано на рисунке. Длина его маршрута в итоге составила 9 км. Чему равно расстояние между точками A и B по прямой? Ответ выразите в километрах.



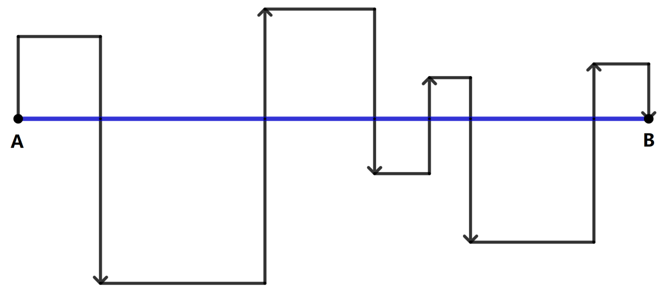
Ответ. 3

Вариант 3. Вася решил прогуляться по городу. Вместо того, чтобы идти по прямой улице, соединяющей точки A и B, Вася обходил квадратные кварталы города по стрелкам, как показано на рисунке. Длина его маршрута в итоге составила 12 км. Чему равно расстояние между точками A и B по прямой? Ответ выразите в километрах.



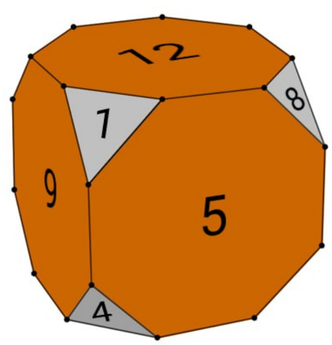
Ответ. 4

Вариант 4. Вася решил прогуляться по городу. Вместо того, чтобы идти по прямой улице, соединяющей точки A и B, Вася обходил квадратные кварталы города по стрелкам, как показано на рисунке. Длина его маршрута в итоге составила 15 км. Чему равно расстояние между точками A и B по прямой? Ответ выразите в километрах.



Ответ. 5

5. Вариант 1. Петя изготовил игральный кубик необычной формы. Он срезал углы у куба, так чтобы получился многогранник с 14 гранями, 8 из которых треугольники, а 6 – восьмиугольники. На каждой грани он записал число от 1 до 14 каждое по одному разу так, что суммы чисел на противоположных гранях оказались одинаковы. Петя подбросил кубик, и тот упал так, как указано на рисунке. Найдите сумму чисел на тех треугольных гранях, которые не видны.

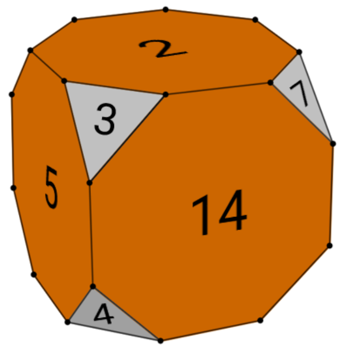


Ответ. 47

Решение. Докажем, что сумма чисел на любых двух противоположных гранях равна 15. Пусть это не так. Тогда рассмотрим грань с числом 14, напротив нее хотя бы 1, значит сумма не меньше 15. Допустим, что она больше 15, но тогда сумма чисел на всех гранях кубика больше чем $15 \cdot 7 = 105$ (у кубика 7 пар граней и сумма каждой пары больше 15). С другой стороны просуммируем числа от 1 до 14, получим ровно 105. Значит такого быть не может. Итак мы доказали, что сумма чисел на любых двух противоположных гранях равна 15.

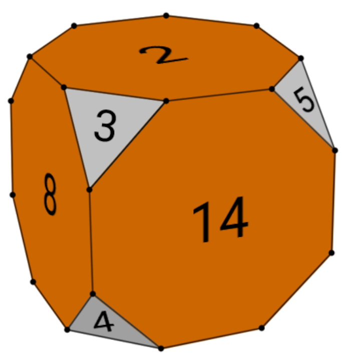
Всего треугольных граней в кубике 8. Из них мы видим 3. Сумма чисел на противоположных им гранях равна $3 \cdot 15 - 1 - 4 - 8 = 32$. Есть еще две противоположные грани, которые нам не видны, но мы знаем, что сумма чисел на них равна 15. Значит сумма чисел на всех невидимых нам треугольных гранях равна $15 + 32 = 47$.

Вариант 2. Петя изготовил игральный кубик необычной формы. Он срезал углы у куба, так чтобы получился многогранник с 14 гранями, 8 из которых треугольники, а 6 – восьмиугольники. На каждой грани он записал число от 1 до 14 каждое по одному разу так, что суммы чисел на противоположных гранях оказались одинаковы. Петя подбросил кубик, и тот упал так, как указано на рисунке. Найдите сумму чисел на тех треугольных гранях, которые не видны.



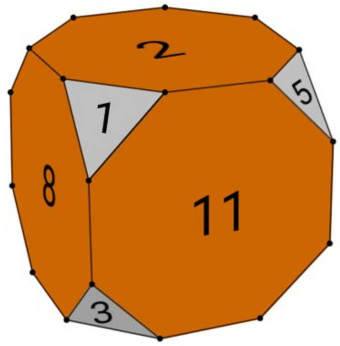
Ответ. 46

Вариант 3. Петя изготовил игральный кубик необычной формы. Он срезал углы у куба, так чтобы получился многогранник с 14 гранями, 8 из которых треугольники, а 6 – восьмиугольники. На каждой грани он записал число от 1 до 14 каждое по одному разу так, что суммы чисел на противоположных гранях оказались одинаковы. Петя подбросил кубик, и тот упал так, как указано на рисунке. Найдите сумму чисел на тех треугольных гранях, которые не видны.



Ответ. 48

Вариант 4. Петя изготовил игральный кубик необычной формы. Он срезал углы у куба, так чтобы получился многогранник с 14 гранями, 8 из которых треугольники, а 6 – восьмиугольники. На каждой грани он записал число от 1 до 14 каждое по одному разу так, что суммы чисел на противоположных гранях оказались одинаковы. Петя подбросил кубик, и тот упал так, как указано на рисунке. Найдите сумму чисел на тех треугольных гранях, которые не видны.



Ответ. 51

6. Вариант 1. Петя записал на доске несколько различных двузначных чисел таких, что сумма никаких двух из них не равна 86. Какое максимальное количество чисел мог написать Петя?

Решение Всего двузначных чисел 90. Рассмотрим такие, которые дают в сумме 86. Это пары 10+76, 11+75, ..., 42+44. Всего пар 33 и из каждой пары можно взять не более одного числа. Тогда всего подходящих чисел не более 90-33=57.

С другой стороны, если взять числа от 10 до 43 и от 77 до 99, то их будет ровно 57 и никакие два не дадут в сумме 86.

Ответ. 57

Вариант 2. Петя записал на доске несколько различных двузначных чисел таких, что сумма никаких двух из них не равна 84. Какое максимальное количество чисел мог написать Петя?

Ответ. 58

Вариант 3. Петя записал на доске несколько различных двузначных чисел таких, что сумма никаких двух из них не равна 78. Какое максимальное количество чисел мог написать Петя?

Ответ. 61

Вариант 4. Петя записал на доске несколько различных двузначных чисел таких, что сумма никаких двух из них не равна 88. Какое максимальное количество чисел мог написать Петя?

Ответ. 56

7. Вариант 1. Даша участвует в розыгрыше приза. На столе стоят 4 пронумерованные коробки, ровно в одной из них приз. Ведущий произносит 4 утверждения, ровно одно из которых истинно:

1. Приз в третьей или четвертой коробке.
2. Приз во второй коробке.
3. Приз не в четвертой коробке.
4. Приз в первой или во второй коробке.

Где находится приз?

Варианты ответа:
1 В первой коробке.
2. Во второй коробке.
3. В третьей коробке.
4. В четвертой коробке.
5. Приз не может лежать ни в какой коробке.
6. Даша не может однозначно определить коробку, так как приз может быть более чем в одной коробке.

Ответ. Приз в четвертой коробке

Решение.

1 способ. Пусть истинно первое утверждение. Тогда вторoе и четвертое ложны, а из третьего следует, что приз в четвертой коробке (так как оно должно быть ложно).

Пусть истинно второе утверждение, тогда четвертое тоже будет истинно. Противоречие.

Пусть истинно третье утверждение, тогда либо первое, либо третье утверждение тоже истинно. Противоречие.

И наконец, если истинно четвертое утверждение, то третье тоже истинно. Противоречие.

Таким образом возможен только вариант, когда истинно первое утверждение. В этом случае приз находится в четвертой коробке.

2 способ. Пусть истинно первое утверждение. Тогда вторoе и четвертое ложны, а из третьего следует, что приз в четвертой коробке (так как оно должно быть ложно).

Пусть теперь первое утверждение ложно. Это означает, что приз точно не в третьей и точно не в четвертой коробках.

Тогда третье и четвертое утверждения одновременно будут истинными. А это невозможно по условию.

Таким образом возможен только вариант, когда истинно первое утверждение. В этом случае приз находится в четвертой коробке.

Вариант 2. Даша участвует в розыгрыше приза. На столе стоят 4 пронумерованные коробки, ровно в одной из них приз. Ведущий произносит 4 утверждения, ровно одно из которых истинно:
1. Приз в первой или во второй коробке.
2. Приз в четвертой коробке.
3. Приз не во второй коробке.
4. Приз в третьей или в четвертой.
Где находится приз?
Варианты ответа:
1 В первой коробке.

2. Во второй коробке.
3. В третьей коробке.
4. В четвертой коробке.
5. Приз не может лежать ни в какой коробке.
6. Даша не может однозначно определить коробку, так как приз может быть более чем в одной коробке.

Ответ. Приз во второй коробке

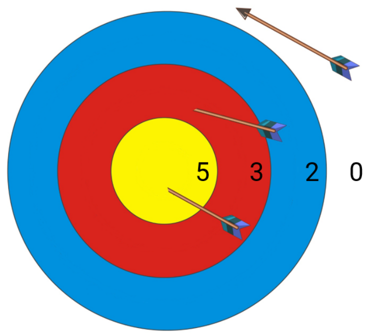
Вариант 3. Даша участвует в розыгрыше приза. На столе стоят 4 пронумерованные коробки, ровно в одной из них приз. Ведущий произносит 4 утверждения, ровно одно из которых истинно:
1. Приз в первой или в четвертой коробке.
2. Приз в третьей коробке.
3. Приз не в первой коробке.
4. Приз во второй или в третьей коробке.
Где находится приз?
Варианты ответа:
1 В первой коробке.
2. Во второй коробке.
3. В третьей коробке.
4. В четвертой коробке.
5. Приз не может лежать ни в какой коробке.
6. Даша не может однозначно определить коробку, так как приз может быть более чем в одной коробке.

Ответ. Приз в первой коробке

Вариант 4. Даша участвует в розыгрыше приза. На столе стоят 4 пронумерованные коробки, ровно в одной из них приз. Ведущий произносит 4 утверждения, ровно одно из которых истинно:
1. Приз во второй или в третьей коробке.
2. Приз в первой коробке.
3. Приз не в третьей коробке.
4. Приз в первой или в четвертой коробке.
Где находится приз?
Варианты ответа:
1 В первой коробке.
2. Во второй коробке.
3. В третьей коробке.
4. В четвертой коробке.
5. Приз не может лежать ни в какой коробке.
6. Даша не может однозначно определить коробку, так как приз может быть более чем в одной коробке.

Ответ. Приз в третьей коробке

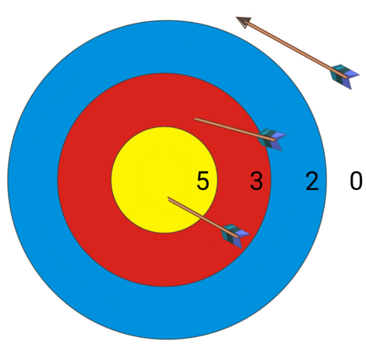
8. Вариант 1. Для чемпионата по стрельбе из лука изготовили необычную мишень, она изображена на рисунке. В каждом раунде спортсмен стреляет тремя стрелами и результат равен сумме очков, полученных за каждую стрелу. Попадание в каждую из областей оценивается в 5, 3 или 2 очка. В случае промаха, начисляется 0 очков. Если стрела попадает в линию, разделяющую две области, то начисляется большее количество очков из этих двух областей. Победитель соревнований набрал 134 очка. Какое наименьшее количество раундов могло быть в чемпионате?



Ответ. 10

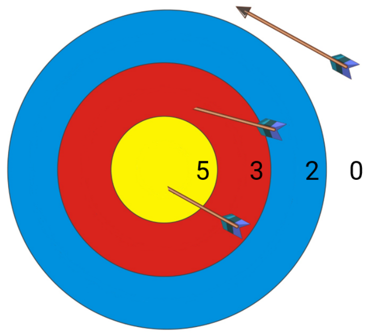
Решение. Заметим, что максимальное количество очков, которое можно набрать за 1 раунд – 15. Так как $15 \cdot 8 = 120 < 134$, то раундов хотя бы 9. Пусть раундов было 9, тогда за 8 раундов было набрано 15 очков, а за 1 раунд 14 очков. Но за 1 раунд нельзя набрать 1, 11, 14 очков. Поэтому раундов было не меньше 10. Такое возможно, например, за каждый из первых 8 раундов набрано по 15 очков, а за последние два раунда по 7 $(7 = 5 + 2 + 0)$.

Вариант 2. Для чемпионата по стрельбе из лука изготовили необычную мишень, она изображена на рисунке. В каждом раунде спортсмен стреляет тремя стрелами и результат равен сумме очков, полученных за каждую стрелу. Попадание в каждую из областей оценивается в 5, 3 или 2 очка. В случае промаха, начисляется 0 очков. Если стрела попадает в линию, разделяющую две области, то начисляется большее количество очков из этих двух областей. Победитель соревнований набрал 164 очка. Какое наименьшее количество раундов могло быть в чемпионате?



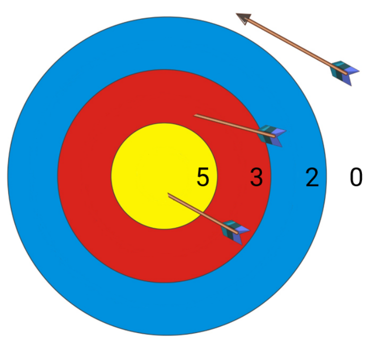
Ответ. 12

Вариант 3. Для чемпионата по стрельбе из лука изготовили необычную мишень, она изображена на рисунке. В каждом раунде спортсмен стреляет тремя стрелами и результат равен сумме очков, полученных за каждую стрелу. Попадание в каждую из областей оценивается в 5, 3 или 2 очка. В случае промаха, начисляется 0 очков. Если стрела попадает в линию, разделяющую две области, то начисляется большее количество очков из этих двух областей. Победитель соревнований набрал 149 очков. Какое наименьшее количество раундов могло быть в чемпионате?



Ответ. 11

Вариант 4. Для чемпионата по стрельбе из лука изготовили необычную мишень, она изображена на рисунке. В каждом раунде спортсмен стреляет тремя стрелами и результат равен сумме очков, полученных за каждую стрелу. Попадание в каждую из областей оценивается в 5, 3 или 2 очка. В случае промаха, начисляется 0 очков. Если стрела попадает в линию, разделяющую две области, то начисляется большее количество очков из этих двух областей. Победитель соревнований набрал 179 очков. Какое наименьшее количество раундов могло быть в чемпионате?



Ответ. 13