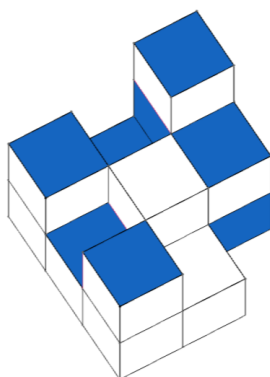


Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2024-2025

6 класс

1. Вариант 1. Петя сложил 14 кубиков, с синими и белыми гранями как показано на рисунке.

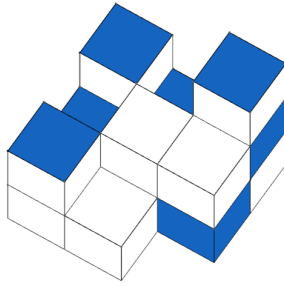


У какого максимального количества кубиков все грани могут быть синими?

Ответ. 5

Решение. На рисунке кубики расположены в три слоя. Отдельный кубик не может висеть в воздухе и не может располагаться ниже поверхности, на которой стоит фигура. Таким образом, некоторые кубики на рисунке не видны, но они точно есть. Заметим, что если у кубика есть хотя бы одна видимая грань белого цвета, то все грани этого кубика не могут быть синими. С другой стороны, если все видимые грани синие, то остальные тоже могут быть синими. У кубика на рисунке из 14 кубиков 9 имеют белые грани, значит максимальное количество синих кубиков – 5.

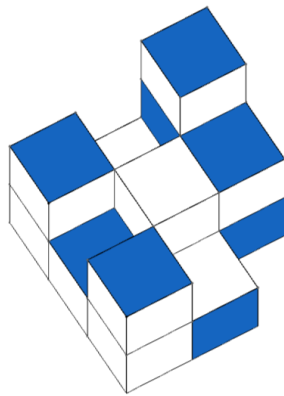
Вариант 2. Петя сложил 14 кубиков, с синими и белыми гранями как показано на рисунке.



У какого максимального количества кубиков все грани могут быть синими?

Ответ. 6

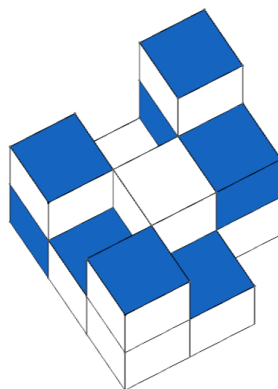
Вариант 3. Петя сложил 14 кубиков, с синими и белыми гранями как показано на рисунке.



У какого максимального количества кубиков все грани могут быть синими?

Ответ. 4

Вариант 4. Петя сложил 14 кубиков, с синими и белыми гранями как показано на рисунке.



У какого максимального количества кубиков все грани могут быть синими?

Ответ. 5

2. Вариант 1. Маша каждый месяц оплачивает интернет и раз в два месяца продлевает подписку на любимый онлайн-кинотеатр. Первого января 2024 года она подключила интернет и сразу же оформила подписку на онлайн-кинотеатр. Цена подписки в 3 раза превышает стоимость интернета за месяц. Маша посчитала, что за весь 2024 год она потратит 13 500 рублей.

Сколько стоит месячный доступ к интернету? Ответ укажите в рублях.

Сколько стоит двухмесячная подписка на онлайн-кинотеатр?

Ответ. Интернет: 450, Подписка: 1350.

Решение. Маша 6 раз заплатит за онлайн-кинотеатр и 12 раз за интернет. Так как стоимость подписки в 3 раза больше стоимости интернета, то за подписки всего она заплатит $3 \cdot 6 = 18$ стоимостей интернета. Тогда, можно считать, что всего она $18 + 12 = 30$ раз оплатила интернет. Так как за год она потратит 13 500, то стоимость интернета составляет $13500 : 30 = 450$ рублей. Стоимость подписки на онлайн-кинотеатр в 3 раза больше, чем стоимость интернета и равна $3 \cdot 450 = 1350$ рублей.

Вариант 2. Маша каждый месяц оплачивает интернет и раз в два месяца продлевает подписку на любимый онлайн-кинотеатр. Первого января 2024 года она подключила интернет и сразу же оформила подписку на онлайн-кинотеатр. Цена подписки в 3 раза превышает стоимость интернета за месяц. Маша посчитала, что за весь 2024 год она потратит 15 000 рублей.

Сколько стоит месячный доступ к интернету? Ответ укажите в рублях.

Сколько стоит двухмесячная подписка на онлайн-кинотеатр?

Ответ. Интернет: 500, Подписка: 1500.

Вариант 3. Маша каждый месяц оплачивает интернет и раз в два месяца продлевает подписку на любимый онлайн-кинотеатр. Первого января 2024 года она подключила интернет и сразу же оформила подписку на онлайн-кинотеатр. Цена подписки в 3 раза превышает стоимость интернета за месяц. Маша посчитала, что за весь 2024 год она потратит 16 500 рублей.

Сколько стоит месячный доступ к интернету? Ответ укажите в рублях.

Сколько стоит двухмесячная подписка на онлайн-кинотеатр?

Ответ. Интернет: 550, Подписка: 1650.

Вариант 4. Маша каждый месяц оплачивает интернет и раз в два месяца продлевает подписку на любимый онлайн-кинотеатр. Первого января 2024 года она подключила интернет и сразу же оформила подписку на онлайн-кинотеатр. Цена подписки в 3 раза превышает стоимость интернета за месяц. Маша посчитала, что за весь 2024 год она потратит 18 000 рублей.

Сколько стоит месячный доступ к интернету? Ответ укажите в рублях.

Сколько стоит двухмесячная подписка на онлайн-кинотеатр?

Ответ. Интернет: 600, Подписка: 1800.

3. Вариант 1. Девять друзей купили 5 пицц, каждая из которых разрезана на 6 или 8 кусочков. Все съели одинаковое количество кусочков, и ничего не осталось. По сколько кусочков съел каждый из друзей?

Ответ. 4

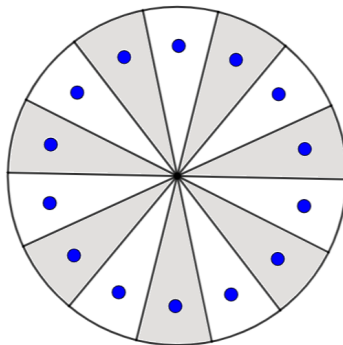
Решение. Количество кусочков пиццы не более $5 \cdot 8 = 40$ и не менее $5 \cdot 6 = 30$. Это количество кусочков нужно раздать девяти друзьям. В этом диапазоне делится на 9 только число 36. Поэтому количество кусочков будет равно $36 : 9 = 4$. Если три пиццы разрезать на 8 кусочков, а две пиццы разрезать на 6 кусочков, то получим ровно 36 кусочков.

Вариант 2. Тринадцать друзей купили 11 пицц, каждая из которых разрезана на 6 или 8 кусочков. Все съели одинаковое количество кусочков, и ничего не осталось. По сколько кусочков съел каждый из друзей?

Ответ. 6

4. Вариант 1. Круг разделен на 14 секторов. В каждом секторе находится один синий шарик. За ход можно выбрать любые два шарика, один из них переместить в соседний сектор по часовой стрелке, а другой – в соседний сектор против часовой стрелки. Можно ли сделать несколько ходов так, чтобы суммарно в серых секторах оказалось указанное количество шариков? Выберите все подходящие ответы:

- 1) ровно 2 шарика
- 2) ровно 3 шарика
- 3) ровно 4 шарика
- 4) ровно 13 шариков
- 5) ровно 14 шариков



Ответ. 2), 4)

Решение. Докажем, что суммарное количество шариков в серых секторах всегда нечетно. Изначально имеется 7 серых секторов и в каждом из них по одному шарик. После каждого хода количество шариков в серых секторах изменяется на четное число. Действи-

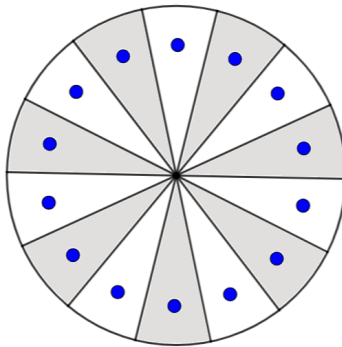
тельно, если по часовой стрелке перемещается шарик из серого сектора, а против часовой – шарик из белого (или наоборот), то общее количество шариков в серых секторах не меняется. Если перемещаются шарик из сектора одного цвета, то общее количество шариков в серых секторах изменяется на 2 – четное число. В любом случае четность количества шариков в серых секторах не меняется. Отсюда следует, что суммарное количество шариков в серых секторах не может быть четным. Покажем теперь, что все нечетные значения можно получить.

Чтобы получить 3 шарика, можно выбрать произвольные две пары серых секторов и сделать по одному ходу в каждой из этих пар. При этом шарик в этих парах переместятся в белые сектора и останется 3 серых сектора с синими шариками.

Чтобы получить 13 шариков, зафиксируем произвольный серый сектор и будем делать ходы из секторов, расположенных симметрично выбранному, так чтобы шарик переместился в этот сектор. Через несколько шагов в этом секторе будет собрано 13 шариков и один шарик останется в белом секторе.

Вариант 2. Круг разделен на 14 секторов. В каждом секторе находится один синий шарик. За ход можно выбрать любые два шарика, один из них переместить в соседний сектор по часовой стрелке, а другой – в соседний сектор против часовой стрелки. Можно ли сделать несколько ходов так, чтобы суммарно в серых секторах оказалось указанное количество шариков? Выберите все подходящие ответы:

- 1) ровно 3 шарика
- 2) ровно 5 шарика
- 3) ровно 6 шарика
- 4) ровно 13 шариков
- 5) ровно 14 шариков

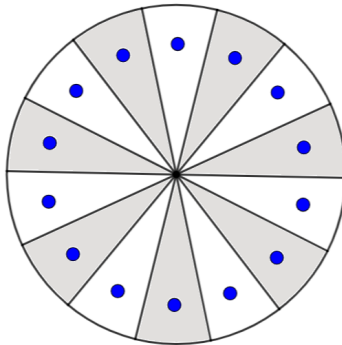


Ответ. 1), 2), 4)

Вариант 3. Круг разделен на 14 секторов. В каждом секторе находится один синий шарик. За ход можно выбрать любые два шарика, один из них переместить в соседний сектор по часовой стрелке, а другой – в соседний сектор против часовой стрелки. Можно ли сделать несколько ходов так, чтобы суммарно в серых секторах оказалось указанное количество шариков? Выберите все подходящие ответы:

- 1) ровно 4 шарика

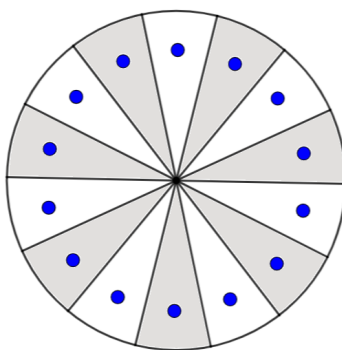
- 2) ровно 6 шарика
- 3) ровно 7 шарика
- 4) ровно 13 шариков
- 5) ровно 14 шариков



Ответ. 3), 4)

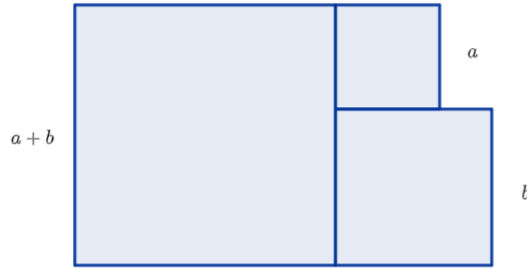
Вариант 4. Круг разделен на 14 секторов. В каждом секторе находится один синий шарик. За ход можно выбрать любые два шарика, один из них переместить в соседний сектор по часовой стрелке, а другой – в соседний сектор против часовой стрелки. Можно ли сделать несколько ходов так, чтобы суммарно в серых секторах оказалось указанное количество шариков? Выберите все подходящие ответы:

- 1) ровно 5 шарика
- 2) ровно 6 шарика
- 3) ровно 9 шарика
- 4) ровно 13 шариков
- 5) ровно 14 шариков



Ответ. 1), 3), 4)

5. Вариант 1. Фигура состоит из трёх различных квадратов со сторонами a , b , $a + b$ сантиметров, причем a, b – целые положительные числа и $a < b$.

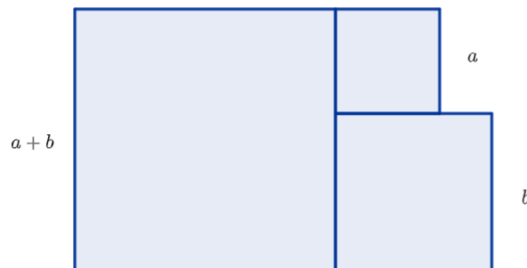


Известно, что периметр фигуры, изображенной на рисунке, составляет 62 сантиметра. Чему может быть равна сумма a и b ? Ответ выразите в сантиметрах. Укажите все возможные варианты.

Ответ. 11, 12

Решение. Посчитаем периметр фигуры следующим образом: сначала сложим периметры всех квадратов, а потом вычтем из полученной суммы те стороны, которые считать не нужно – удвоенную сторону самого большого квадрата и удвоенную сторону самого маленького. Периметр фигуры равен $2(a+b) + 2a + 4b = 4a + 6b$. Получаем, что $2a + 3b = 31$. Из этого равенства следует, что b не может быть больше 10, иначе левая часть будет больше 32. Кроме того, заметим, что b нечетно и по условию известно, что $a < b$. Перебирая значения b получим, что подойдут следующие пары (a, b) : $(2, 9)$, $(5, 7)$.

Вариант 2. Фигура состоит из трёх различных квадратов со сторонами a , b , $a + b$ сантиметров, причем a, b – целые положительные числа и $a < b$.



Известно, что периметр фигуры, изображенной на рисунке, составляет 68 сантиметров. Чему может быть равна сумма a и b ? Ответ выразите в сантиметрах. Укажите все возможные варианты.

Ответ. 12, 13

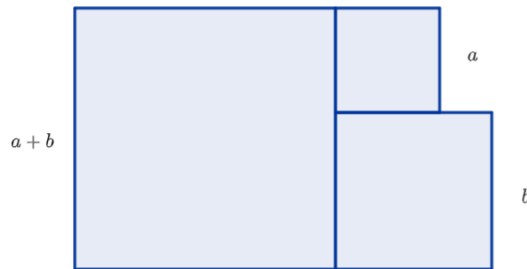
Вариант 3. Фигура состоит из трёх различных квадратов со сторонами a , b , $a + b$ сантиметров, причем a, b – целые положительные числа и $a < b$.



Известно, что периметр фигуры, изображенной на рисунке, составляет 72 сантиметра. Чему может быть равна сумма a и b ? Ответ выразите в сантиметрах. Укажите все возможные варианты.

Ответ. 13, 14

Вариант 4. Фигура состоит из трёх различных квадратов со сторонами a , b , $a + b$ сантиметров, причем a, b – целые положительные числа и $a < b$.



Известно, что периметр фигуры, изображенной на рисунке, составляет 78 сантиметров. Чему может быть равна сумма a и b ? Ответ выразите в сантиметрах. Укажите все возможные варианты.

Ответ. 14, 15

6. Вариант 1. На кинофестиваль приехало 5000 зрителей, некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут. В финал конкурса вышли два фильма, и каждый зритель должен проголосовать ровно за один из них. После завершения конкурсной программы 3000 зрителей сказали, что проголосуют за фильм А, а 2000, что проголосуют за фильм Б. После этого, все 3000 зрителей, обещавших проголосовать за А, произнесли следующую фразу: «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец». Какое наименьшее количество голосов мог набрать в итоге фильм-победитель?

Ответ. 3001

Решение. Заметим, что все 3000 зрителей, которые сказали, что проголосуют за фильм А либо одновременно рыцари, либо одновременно лжецы. Это следует из того, что

истинность фразы, сказанной каждым из них: «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец», определяется однозначно.

Рассмотрим два случая. 1) Все 3000 зрителей рыцари, тогда во-первых верно, что все они проголосуют за А, а во-вторых, что оставшиеся 2000 зрителей лжецы и тоже проголосуют за А. Тогда фильм-победитель наберет 5000 голосов. 2) Все 3000 – лжецы. Тогда все они проголосуют за Б и найдется хотя бы один человек из оставшихся 2000 зрителей, который проголосует за Б. Это следует из того, что фраза «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец» ложна. В этом случае фильмом-победителем будет Б и он наберет не менее чем 3001 голос.

Вариант 2. На кинофестиваль приехало 6000 зрителей, некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут. В финал конкурса вышли два фильма, и каждый зритель должен проголосовать ровно за один из них. После завершения конкурсной программы 4000 зрителей сказали, что проголосуют за фильм А, а 2000, что проголосуют за фильм Б. После этого, все 4000 зрителей, обещавших проголосовать за А, произнесли следующую фразу: «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец». Какое наименьшее количество голосов мог набрать в итоге фильм-победитель?

Ответ. 4001

Вариант 3. На кинофестиваль приехало 7000 зрителей, некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут. В финал конкурса вышли два фильма, и каждый зритель должен проголосовать ровно за один из них. После завершения конкурсной программы 5000 зрителей сказали, что проголосуют за фильм А, а 2000, что проголосуют за фильм Б. После этого, все 5000 зрителей, обещавших проголосовать за А, произнесли следующую фразу: «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец». Какое наименьшее количество голосов мог набрать в итоге фильм-победитель?

Ответ. 5001

Вариант 4. На кинофестиваль приехало 7000 зрителей, некоторые из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные – лжецы, которые всегда лгут. В финал конкурса вышли два фильма, и каждый зритель должен проголосовать ровно за один из них. После завершения конкурсной программы 6000 зрителей сказали, что проголосуют за фильм А, а 1000, что проголосуют за фильм Б. После этого, все 6000 зрителей, обещавших проголосовать за А, произнесли следующую фразу: «Каждый из тех, кто сказал, что проголосует за фильм Б – лжец». Какое наименьшее количество голосов мог набрать в итоге фильм-победитель?

Ответ. 6001

7. Вариант 1. В турнире по боссаболлу за победу в каждом матче дается 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих не бывает. Организаторы решили провести турнир среди 10 команд. Турнир проводится по круговой системе – каждая команда играет с каждой один раз. В каждом туре проходит 5 матчей: команды разбиваются на пары, еще не игравших друг с другом. Через какое наименьшее количество туров может наступить момент, когда не найдется 3 команд, набравших одинаковое количество очков?

Ответ. 4

Решение. Чтобы не нашлось 3 команд, набравших одинаковое количество очков, нужно, чтобы одинаковое количество очков набрало не более 2 команд. Тогда одна из команд должна набрать не менее 4 очков. Действительно, если все набрали менее 4 очков, то каждая команда набрала 0, 1, 2 или 3 очка. Если одинаковое количество очков набрало не более 2 команд, то команд не более $2 \cdot 4 = 8$. Противоречие. Таким образом, туров не меньше 4.

Пример. В таблице на рисунке ниже представлен пример, как за 4 тура можно достигнуть указанную оценку.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Побед
1	x		1	1	1					1	4
2		x			1	1	1	1			4
3	0		x				1	1	1		3
4	0			x			1	1	1		3
5	0	0			x	1			1		2
6		0			0	x			1	1	2
7		0	0	0			x			1	1
8			0	0	0			x		1	1
9				0	0	0			x		0
10	0					0	0	0		x	0

Вариант 2. В турнире по боссаболлу за победу в каждом матче дается 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих не бывает. Организаторы решили провести турнир среди 12 команд. Турнир проводится по круговой системе – каждая команда играет с каждой один раз. В каждом туре проходит 6 матчей: команды разбиваются на пары, еще не игравших друг с другом. Через какое наименьшее количество туров может наступить момент, когда не найдется 3 команд, набравших одинаковое количество очков?

Ответ. 5

Вариант 3. В турнире по боссаболлу за победу в каждом матче дается 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих не бывает. Организаторы решили провести турнир среди 12 команд. Турнир проводится по круговой системе – каждая команда играет с каждой один раз. В каждом туре проходит 6 матчей: команды разбиваются на пары, еще не игравших друг с другом. Через какое наименьшее количество туров может наступить момент, когда не найдется 4 команд, набравших одинаковое количество очков?

Ответ. 3

Вариант 4. В турнире по боссаболлу за победу в каждом матче дается 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих не бывает. Организаторы решили провести турнир среди 14 команд. Турнир проводится по круговой системе – каждая команда играет с каждой один раз. В каждом туре проходит 7 матчей: команды разбиваются на пары, еще не игравших друг с другом. Через какое наименьшее количество туров может наступить момент, когда не найдется 3 команд, набравших одинаковое количество очков?

Ответ. 6

8. Вариант 1. Анна и Борис загадали по три различных положительных целых числа и записали их на листочках, которые отдали Володе. Оказалось, что на их листочках ровно одно общее число. Также Володя заметил, что если сложить два любых разных числа с листочка Анны, то получится одно из чисел Бориса. Затем Володя попросил каждого из ребят выбрать одно из трех записанных ими чисел и назвать его. Анна назвала число, которое

в 3 раза меньше, чем одно из чисел Бориса. А Борис назвал число 25. Какое число назвала Анна?

Ответ. 5

Решение. Пусть Анна записала на листочке три числа – назовем их «меньшее», «среднее» и «большее». Тогда числа Бориса – это «меньшее»+«среднее», «меньшее»+«большее», «среднее»+«большее» (сейчас мы их записали в порядке возрастания).

По условию у Анны и Бориса есть общее число и этим числом может быть только самое маленькое число Бориса. Действительно, числа «меньшее»+«большее», «среднее»+«большее» будут больше, чем самое большое число Анны (ведь к «большому» числу что-то прибавляется). Тогда «большее»=«меньшее»+«среднее».

Обозначим для удобства «большее» буквой Б, «среднее» буквой С, а меньшее буквой М. Мы получили, что $Б=М+С$.

У Анны будут числа М, С, Б, а у Бориса $М+С$, $М+Б$, $С+Б$. Если воспользоваться тем, что $Б=М+С$, то числа Бориса – это $М+С$, $М+М+С$, $М+С+С$.

По условию одно из чисел Бориса в 3 раза больше какого-то из чисел Анны, рассмотрим какое это может быть число.

Самое большое число Анны не может быть в 3 раза меньше какого-то из чисел Бориса. Так как $3(М+С)=3М+3С$, а это больше любого числа Бориса.

Также невозможно, что среднее число Анны в 3 раза меньше какого-то числа Бориса, так как $3С=С+С+С>М+С+С$, то есть больше самого большого числа Бориса.

Теперь заметим, что $3М=М+М+М<М+М+С$ и $3М=М+М+М<М+С+С$. Значит единственный возможный вариант – когда самое маленькое число Анны в 3 раза меньше самого маленького числа Бориса. То есть выполняется равенство $3М=М+С$. Отсюда $2М=С$.

Значит числа Анны – это М, 2М, 3М, а числа Бориса – это 3М, 4М, 5М. Одно из чисел Бориса – это число 25, но таким числом может быть только 5М, потому что 25 не делится на 3 и на 4. Значит Анна назвала число $25 : 5 = 5$.

Вариант 2. Анна и Борис загадали по три различных положительных целых числа и записали их на листочках, которые отдали Володе. Оказалось, что на их листочках ровно одно общее число. Также Володя заметил, что если сложить два любых разных числа с листочка Анны, то получится одно из чисел Бориса. Затем Володя попросил каждого из ребят выбрать одно из трех записанных ими чисел и назвать его. Анна назвала число, которое в 3 раза меньше, чем одно из чисел Бориса. А Борис назвал число 35. Какое число назвала Анна?

Ответ. 7

Вариант 3. Анна и Борис загадали по три различных положительных целых числа и записали их на листочках, которые отдали Володе. Оказалось, что на их листочках ровно одно общее число. Также Володя заметил, что если сложить два любых разных числа с листочка Анны, то получится одно из чисел Бориса. Затем Володя попросил каждого из

ребят выбрать одно из трех записанных ими чисел и назвать его. Анна назвала число, которое в 3 раза меньше, чем одно из чисел Бориса. А Борис назвал число 10. Какое число назвала Анна?

Ответ. 2

Вариант 4. Анна и Борис загадали по три различных положительных целых числа и записали их на листочках, которые отдали Володе. Оказалось, что на их листочках ровно одно общее число. Также Володя заметил, что если сложить два любых разных числа с листочка Анны, то получится одно из чисел Бориса. Затем Володя попросил каждого из ребят выбрать одно из трех записанных ими чисел и назвать его. Анна назвала число, которое в 3 раза меньше, чем одно из чисел Бориса. А Борис назвал число 50. Какое число назвала Анна?

Ответ. 10