Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 6 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей, а арбуз, две дыни и два нектарина — на 50 рублей дешевле. Сколько стоит набор из арбуза, дыни и двух нектаринов? Ответ выразите в рублях.

Ответ: 650

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Из условия получаем, что арбуз, две дыни и два нектарина стоят 950 рублей. Известно, что два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей. Складывая, получаем, что три арбуза, три дыни и шесть нектаринов стоят 1950 рублей, делим на 3 и выясняем, что арбуз, дыня и два нектарина стоят 650 рублей.

Задание № 1.2

Условие:

Шесть эклеров, шоколадное пирожное и два профитроля стоят 850 рублей, а три эклера, два шоколадных пирожных и один профитроль — на 230 рублей дешевле. Сколько стоит набор из трёх эклеров, шоколадного пирожного и профитроля? Ответ выразите в рублях.

Ответ: 490

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Четыре розы, два тюльпана и пион стоят 790 рублей, а две розы, четыре тюльпана и два пиона — на 70 рублей дороже. Сколько стоит набор из двух роз, двух тюльпанов и пиона? Ответ выразите в рублях.

Ответ: 550

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Три шоколадки, две газировки и четыре пачки чипсов стоят 1090 рублей, а шесть шоколадок, газировка и две пачки чипсов — на 140 рублей дешевле. Сколько стоит набор из трёх шоколадок, газировки и двух пачек чипсов? Ответ выразите в рублях.

Ответ: 680

Точное совпадение ответа — 1 балл

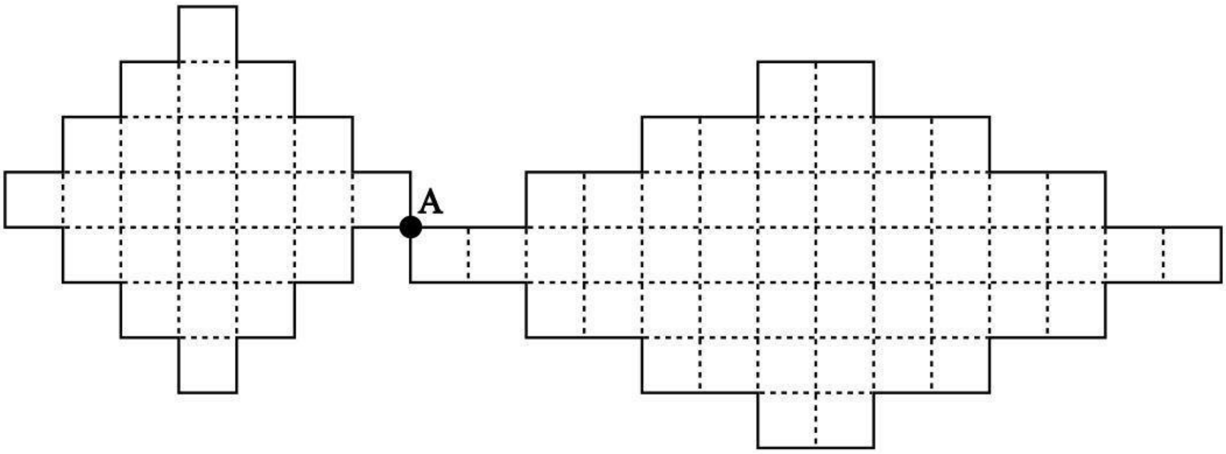
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Персонаж Ральф живет в компьютерной игре, поэтому озера в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке.



Каждое утро Ральф идет на пробежку вдоль берега одного из двух озер: начинает в точке А, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в А. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 2 минуты. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

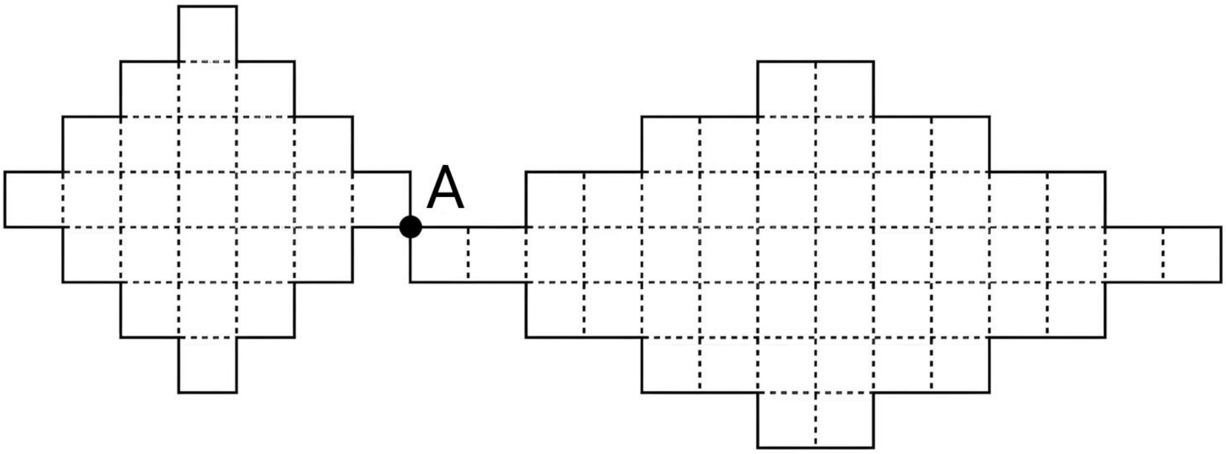
Решение.

Вдоль одной клетки Ральф пробегает за 2 мин = 120 секунд, следовательно, вдоль одной стороны клетки — за $120 \div 4 = 30$ секунд. Выясним, на сколько периметр второго озера больше, чем первого. Наборы вертикальных отрезков в озерах совпадают, а каждый горизонтальный отрезок в фигуре справа на 1 длиннее, чем в фигуре слева. Поэтому периметр второй фигуры больше на $7 \cdot 2 = 14$ (у фигуры в верхней и в нижней частях по 7 горизонтальных отрезков). Значит, на вторую пробежку Ральф потратит на $14 \cdot 30$ секунд, то есть на 7 минут больше.

Задание № 2.2

Условие:

Персонаж Ральф живёт в компьютерной игре, поэтому озёра в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке.



Каждое утро Ральф идёт на пробежку вдоль берега одного из двух озёр: начинает в точке А, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в А. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 4 минуты. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?

Ответ: 14

Точное совпадение ответа — 1 балл

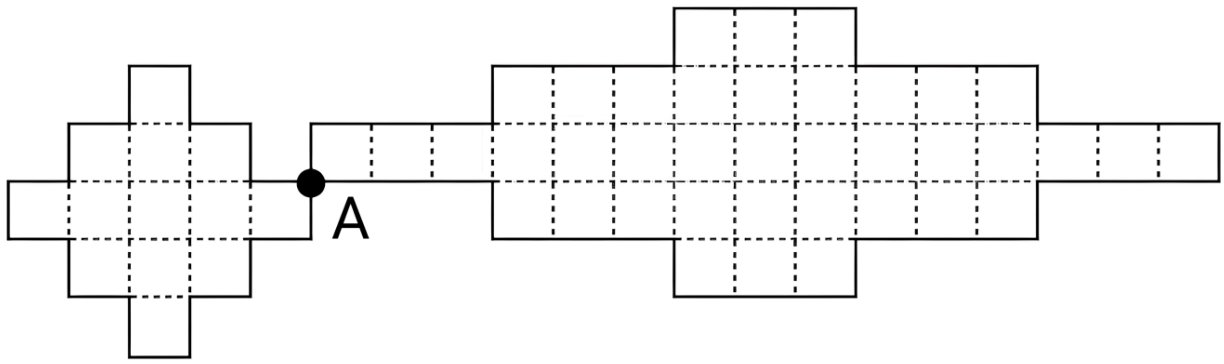
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Персонаж Ральф живёт в компьютерной игре, поэтому озёра в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке.



Каждое утро Ральф идёт на пробежку вдоль берега одного из двух озёр: начинает в точке А, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в А. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 3 минуты. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

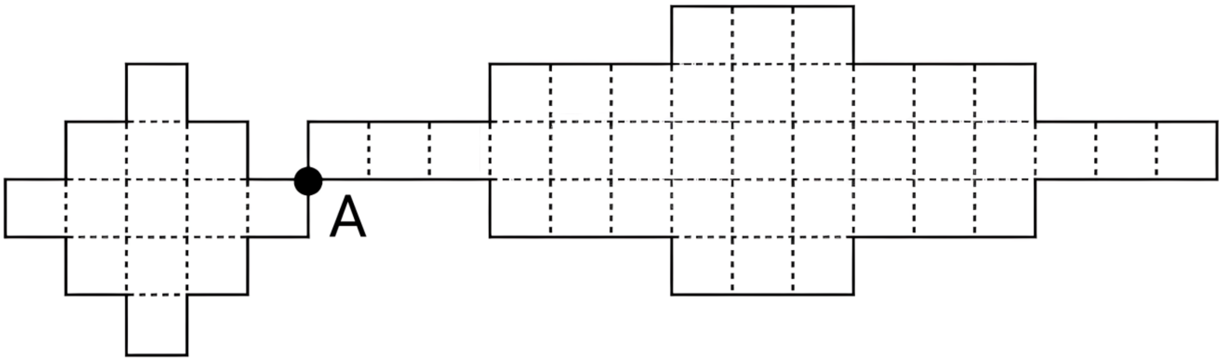
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Персонаж Ральф живёт в компьютерной игре, поэтому озёра в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке.



Каждое утро Ральф идёт на пробежку вдоль берега одного из двух озёр: начинает в точке А, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в А. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 1 минуту. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

По кругу расставлены шестьдесят горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых трёх стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно четыре лягушки. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 800

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Если в любых трех подряд идущих горшках сидит суммарно ровно четыре лягушки, и при этом (по условию) ни один из горшков не пустует, то единственное возможное расположение лягушек в горшках — это расположение, при котором в каждом третьем горшке сидит по две лягушки, а в остальных горшках сидит по одной лягушке, то есть 112112112112…, расставленные по кругу, где числа обозначают количество лягушек в одном горшке. Таким образом, ровно в двадцати горшках из шестидесяти сидит по две лягушки, а в остальных сорока сидит по одной лягушке. Чтобы в двух из этих горшков суммарно оказалось ровно три лягушки, нужно взять один горшок, в котором одна лягушка, и один горшок, в котором две лягушки. Всего способов выбрать такие два горшка — $20 \cdot 40 = 800$ способов, — это и есть ответ.

Задание № 3.2

Условие:

По кругу расставлены восемьдесят горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых четырёх стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно пять лягушек. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 1200

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

По кругу расставлены сто горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых пяти стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно шесть лягушек. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 1600

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

По кругу расставлены девяносто горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых трёх стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно четыре лягушки. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 1800

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 15. Сумма баллов всех трех девочек оказалась меньше 60 и в $3\frac{1}{3}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

По условию А = Э. Посчитаем сумму всех баллов двумя способами:

$2А + П = П \cdot 10 \div 3 < 60$, $2А = П \cdot 7 \div 3 < 60 \cdot 7 \div 10 = 42$, $Х = П \cdot 7 \div 3 = 2А$, что по условию больше 15, а раз П, А — целые, то Х — четное, кратное 7, большее 15 и меньшее 42. Под эти условия подходит единственное число $28 = 2А$. Отсюда, $А = 14$.

Задание № 4.2

Условие:

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 21. Сумма баллов всех трёх девочек оказалась меньше 72 и в $2\frac{1}{4}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 31. Сумма баллов всех трёх девочек оказалась меньше 70 и в $3\frac{1}{2}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 29. Сумма баллов всех трёх девочек оказалась меньше 88 и в $2\frac{3}{4}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 21

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

В футбольном турнире принимали участие 35 команд, среди которых команды «Белка» и «Стрелка». Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, а проигравшая — 0 очков, в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда «Белка» набрала 100 очков, а команда «Стрелка» со всеми командами сыграла вничью. Какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 97

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Команда «Белка», которая набрала 100 очков, могла набрать их только одним единственным способом — если она выиграла у тридцати трех команд и сыграла вничью с оставшейся тридцать четвертой. Именно «Белка» и заняла первое место в турнире — больше нее набрать никто не мог, так как больше могла набрать только команда, которая бы у всех выиграла, но таких команд быть не могло, потому что у «Белки» не выиграл никто. Мы знаем, что команда «Стрелка» со всеми сыграла вничью — а значит, это именно она сыграла с «Белкой» вничью, а все остальные команды «Белке» проиграли. Это значит, что команда, занявшая второе место, в любом случае проиграла «Белке» и сыграла вничью со «Стрелкой»; наибольшее возможное количество очков у нее было бы, если бы у всех остальных команд она выиграла. В этом случае она получила бы $32 \cdot 3 + 1 = 97$ очков. Это и есть ответ.

Задание № 5.2

Условие:

В футбольном турнире принимали участие 37 команд, среди которых команды «Белка» и «Стрелка». Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, а проигравшая — 0 очков, в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда «Белка» набрала 106 очков, а команда «Стрелка» со всеми командами сыграла вничью. Какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 103

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

В футбольном турнире принимали участие 39 команд, среди которых команды «Белка» и «Стрелка». Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, а проигравшая — 0 очков, в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда «Белка» набрала 112 очков, а команда «Стрелка» со всеми командами сыграла вничью. Какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 109

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

В футбольном турнире принимали участие 33 команды, среди которых команды «Белка» и «Стрелка». Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, а проигравшая — 0 очков, в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда «Белка» набрала 94 очка, а команда «Стрелка» со всеми командами сыграла вничью. Какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 91

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед слева — рыцарь». Второй, четвёртый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед слева — лжец». Чему может быть равно число N? Соседом слева называется следующий по часовой стрелке человек. Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ 21
- ✓ 32
- o 43
- o 54

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что слева от нечетного человека стоит человек того же вида, а от четного — противоположного. Значит первый и второй будут одного вида, а третий и четвертый — противоположного. Аналогично можно рассуждать для четверки с третьего до шестого человека. Значит круг выглядит как-то так: РРЛЛРРЛЛ… Посмотрим, что происходит на стыке. Если N четно, то первый и последний разных видов, значит пары рыцарей чередуются с парами лжецов, следовательно, N кратно четырем. Если N нечетно, то первый и последний одного вида, следовательно, N имеет вид $4k + 1$.

Задание № 6.2

Условие:

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Второй, четвёртый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед слева — рыцарь». Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед слева — лжец». Чему может быть равно число N? Соседом слева называется следующий по часовой стрелке человек. Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ○ 22
- ○ 33
- ✓ 44
- ✓ 55

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед справа — рыцарь». Второй, четвёртый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед справа — лжец». Чему может быть равно число N? Соседом справа называется следующий по часовой стрелке человек. Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ○ 23
- ○ 34
- ✓ 45
- ✓ 56

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Второй, четвёртый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед справа — рыцарь». Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: «Мой сосед справа — лжец». Чему может быть равно число N? Соседом справа называется следующий по часовой стрелке человек. Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ 24
- ✓ 35
- o 46
- o 57

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

На каждом шаге к данному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 51?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пример получения за 8 шагов: 1-2-3-6-12-24-25-50-51. Покажем, что за 7 шагов этого сделать невозможно. Для получения числа 51 последним шагом может быть только 50-51, а первый шаг не зависит от выбора операции. Предположим, что из 2 получили 50 за 5 шагов. Среди этих шагов должна присутствовать первая операция. Иначе за пять шагов получим число 6. Заметим, что если к числу n применяется сначала первая операция, а затем вторая, то получим число $2n + 2$. Если наоборот, то $2n + 1$. Кроме того, в первом случае получается число большее, чем во втором: $2n + 2 > 2n + 1$. Значит, даже если первая операция только одна и выполняется первой, за пять шагов получим: 2-3-6-12-24-48, число 48 меньше, чем 50.

Задание № 7.2

Условие:

На каждом шаге к данному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 53?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

На каждом шаге к данному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 99?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

На каждом шаге к данному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 101?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Сколько существует натуральных чисел, в 23 раза больших своего наименьшего собственного делителя? Делитель называется собственным, если он больше 1, но меньше самого числа.

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Наименьший собственный делитель является простым. Числа представляются в виде 23p, где p — простое, не превосходящее 23. Таких простых чисел 9.

Задание № 8.2

Условие:

Сколько существует натуральных чисел, в 19 раз больших своего наименьшего собственного делителя? Делитель называется собственным, если он больше 1, но меньше самого числа.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Сколько существует натуральных чисел, в 29 раз больших своего наименьшего собственного делителя? Делитель называется собственным, если он больше 1, но меньше самого числа.

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Сколько существует натуральных чисел, в 31 раз больших своего наименьшего собственного делителя? Делитель называется собственным, если он больше 1, но меньше самого числа.

Ответ: 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1