Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2024-2025

7 класс

1. Вариант 1. Буквы А, Б, В, Г соответствуют ненулевым цифрам. Разные буквы – разным цифрам.

Известно, что

$$\begin{array}{cr} & \text{АБВ} \\ + & \text{БВГ} \\ & \text{ВГА} \\ & \text{ГАБ} \\ \hline & 2\,331 \end{array}$$

Чему может быть равна сумма А+Б+В+Г?
Варианты ответа:
(выбор одного ответа)
1) 19
2) 21
3) 22
4) 23
5) 24
6) 25

Ответ. 21 [2)]

Решение.

АБВ+БВГ+ВГА+ГАБ= 111·(А+Б+В+Г).

Следовательно, А+Б+В+Г=2331 : 111 = 21.

Вариант 2. Буквы А, Б, В, Г соответствуют ненулевым цифрам. Разные буквы – разным цифрам.

Известно, что

$$\begin{array}{cr} & \text{АБВ} \\ + & \text{БВГ} \\ & \text{ВГА} \\ & \text{ГАБ} \\ \hline & 2\,442 \end{array}$$

Чему может быть равна сумма А+Б+В+Г?
Варианты ответа:
(выбор одного ответа)
1) 19
2) 21
3) 22
4) 23
5) 24
6) 25

Ответ. 22 [3)]

Вариант 3. Буквы А, Б, В, Г соответствуют ненулевым цифрам. Разные буквы – разным цифрам.

Известно, что

$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ + \quad \text{БВГ} \\ \text{ВГА} \\ \text{ГАБ} \\ \hline 2\ 553 \end{array}$$

Чему может быть равна сумма А+Б+В+Г?
Варианты ответа:
(выбор одного ответа)
1) 19
2) 21
3) 22
4) 23
5) 24
6) 25

Ответ. 23 [4)]

Вариант 4. Буквы А, Б, В, Г соответствуют ненулевым цифрам. Разные буквы – разным цифрам.

Известно, что

$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ + \quad \text{БВГ} \\ \text{ВГА} \\ \text{ГАБ} \\ \hline 2\ 664 \end{array}$$

Чему может быть равна сумма А+Б+В+Г?
Варианты ответа:
(выбор одного ответа)

1) 19
2) 21
3) 22
4) 23
5) 24
6) 25

Ответ. 24 [5)]

2. Вариант 1. В городе 1234 жителей. В первый день один из жителей города узнал новость. Во второй день он сообщил новость двум другим жителям. И так происходило каждый день: каждый человек, который знал новость, за день сообщал ее двум другим. На N-ый день все жители города узнали новость. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ. 8

Решение. Количество людей, знающих новость, через день может увеличиться не более, чем втрое (ровно втрое, если каждый рассказывает новость людям, до того её не знающим). Следовательно, семи дней не хватит, так как за это время новость узнают не более $1 \cdot 3^6 = 729$ человек. А вот 8 дней уже будет достаточно: $3^7 = 2187 > 1234$, поэтому со 2 по 7 день каждый знающий может рассказывать новость каждый раз двум новым людям, а в последний восьмой день 729 человек расскажут новость оставшимся 505.

Вариант 2. В городе 1234 жителей. В первый день двое из жителей города узнали новость. Во второй день каждый из них сообщил новость двум другим жителям. И так происходило каждый день: каждый человек, который знал новость, за день сообщал ее двум другим. На N-ый день все жители города узнали новость. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ. 7

Вариант 3. В городе 2345 жителей. В первый день один из жителей города узнал новость. Во второй день он сообщил новость двум другим жителям. И так происходило каждый день: каждый человек, который знал новость, за день сообщал ее двум другим. На N-ый день все жители города узнали новость. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ. 9

Вариант 4. В городе 1234 жителей. В первый день семеро жителей города узнали новость. Во второй день каждый из них сообщил новость двум другим жителям. И так происходило каждый день: каждый человек, который знал новость, за день сообщал ее двум другим. На N-ый день все жители города узнали новость. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ. 6

3. Вариант 1. В одном високосном году вторников было больше, чем воскресений. Какой из дней недели мог 53 раза встречаться в году, следующем за этим високосным? Выберите ВСЕ возможные варианты.

Ответ. среда, четверг.

Решение. В високосном году 366 дней. Поделим 366 на 7 с остатком: $366 = 7 \cdot 52 + 2$. Значит, за первые 364 дня каждый день недели встретится по 52 раза, а потом еще какие-то два подряд идущих дня встретятся по разу, т.е. в сумме 53 раза.По условию, один из этих дней – вторник. Значит, эти два дня либо понедельник и вторник, либо вторник и среда. Значит, следующий год начинается либо в среду, либо в четверг. Остается заметить, что невисокосный год начинается и заканчивается одним и тем же днем недели, который и встречается 53 раза ($365 = 7 \cdot 52 + 1$).

Вариант 2. В одном високосном году четвергов было больше, чем воскресений. Какой из дней недели мог 53 раза встречаться в году, следующем за этим високосным? Выберите ВСЕ возможные варианты.

Ответ. пятница, суббота.

Вариант 3. В одном високосном году вторников было столько же, сколько четвергов. Какой из дней недели мог 53 раза встречаться в году, следующем за этим високосным? Выберите ВСЕ возможные варианты.

Ответ. воскресенье, понедельник, вторник.

Вариант 4. В одном високосном году вторников было столько же, сколько пятниц. Какой из дней недели мог 53 раза встречаться в году, следующем за этим високосным? Выберите ВСЕ возможные варианты.

Ответ. пятница, понедельник, вторник.

4. Вариант 1. Три автобусные колонны со школьниками отправились по оздоровительным лагерям: в первой колонне 154 школьника, во второй – 182, в третьей – 210. Известно, что в каждом из автобусов ехало одинаковое количество ребят. Чему равно наименьшее суммарное количество автобусов, задействованных при перевозке?

Ответ. 39

Решение. Пусть в одном автобусе ехало n человек. Тогда числа 154, 182 и 210 должны делиться на n, Чем больше людей в одном автобусе, тем меньше автобусов, поэтому нам надо найти наибольший общий делитель этих чисел. Так как $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то наибольший общий делитель - это $2 \cdot 7 = 14$. Поэтому количество автобусов будет минимальным при $n = 14$ и будет равно $(154 + 182 + 210)/14 = 39$.

Вариант 2. Три автобусные колонны со школьниками отправились по оздоровительным лагерям: в первой колонне 286 школьников, во второй – 154, в третьей – 198. Известно, что в каждом из автобусов ехало одинаковое количество ребят. Чему равно наименьшее суммарное количество автобусов, задействованных при перевозке?

Ответ. 29

Вариант 3. Три автобусные колонны со школьниками отправились по оздоровительным лагерям: в первой колонне 168 школьников, во второй – 273, в третьей – 420. Известно, что в каждом из автобусов ехало одинаковое количество ребят. Чему равно наименьшее суммарное количество автобусов, задействованных при перевозке?

Ответ. 41

Вариант 4. Три автобусные колонны со школьниками отправились по оздоровительным лагерям: в первой колонне 420 школьников, во второй – 280, в третьей – 245. Известно, что в каждом из автобусов ехало одинаковое количество ребят. Чему равно наименьшее суммарное количество автобусов, задействованных при перевозке?

Ответ. 27

5. Вариант 1. В коробке лежат 5 синих, 7 жёлтых и 9 зеленых карандашей. Какое наибольшее количество красных карандашей можно добавить в коробку, чтобы среди любых 20 выбранных были карандаши по крайней мере трёх различных цветов?

Ответ. 10

Решение. Для того, чтобы *среди любых 20 выбранных были карандаши по крайней мере трёх различных цветов*, необходимо, чтобы любые два цвета в сумме давали не более 19 карандашей. Для всех пар цветов из набора {синий, желтый, зеленый} это условие уже выполняется, поэтому остаётся проверить его для пар, где один из цветов красный. Так как из оставшихся самый многочисленный зеленый, то достаточно посмотреть на пару {красный, зеленый}. $k+9 \leq 19$, где k - количество красных карандашей. Следовательно, $k \leq 10$.

Покажем, что коробки, где лежат 5 синих, 7 желтых, 9 зеленых и 10 красных карандашей выполняется условие задачи. Предположим, что при доставании оттуда 20 карандашей не нашлось трех цветов. Но тогда мы достали карандаши не более, чем двух цветов, а их не более, чем $10+9<20$. Противоречие.

Вариант 2. В коробке лежат 9 синих, 9 жёлтых и 10 зеленых карандашей. Какое наибольшее количество красных карандашей можно добавить в коробку, чтобы среди любых 22 выбранных были карандаши по крайней мере трёх различных цветов?

Ответ. 11

Вариант 3. В коробке лежат 7 синих, 8 жёлтых и 16 зеленых карандашей. Какое наибольшее количество красных карандашей можно добавить в коробку, чтобы среди любых 30 выбранных были карандаши по крайней мере трёх различных цветов?

Ответ. 13

Вариант 4. В коробке лежат 10 синих, 11 жёлтых и 12 зеленых карандашей. Какое наибольшее количество красных карандашей можно добавить в коробку, чтобы среди любых 30 выбранных были карандаши по крайней мере трёх различных цветов?

Ответ. 17

6. Вариант 1. У Васи в кармане монеты достоинством 1, 2, 5, 10 рублей, причем каждого вида по 6 штук. Васе необходимо набрать ровно 98 рублей. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 9

Решение. У нас всего 24 монеты на общую сумму $(1 + 2 + 5 + 10) \cdot 6 = 108$ рублей. Набрать 98 рублей - это то же самое, что взять все 108 рублей и выбрать, какие из монет надо выкинуть, чтобы осталось 98. Т.е. количество способов набрать 98 рублей равно количеству способов набрать 108 - 98 = 10 рублей, которые мы не возьмем.

Проведём перебор по количеству десятирублёвых монет.

1) одна десятирублёвая монета. 1 способ.

2) Если нет десятирублёвых монет, то перебираем все варианты по количеству пятирублёвых. а) Две пятирублевых монеты: 1 способ. $5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0$; б) Одна пятирублевая монета: 3 способа. $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$; $5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$; $5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5$; в) Ноль пятирублёвых монет: 4 способа. $5 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0$; $5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2$; $5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4$; $5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6$;

Итого, 1+1+3+4=9 способов.

Вариант 2. У Васи в кармане монеты достоинством 1, 2, 5, 10 рублей, причем каждого вида по 6 штук. Васе необходимо набрать ровно 94 рубля. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 12

Вариант 3. У Васи в кармане монеты достоинством 1, 2, 5, 10 рублей, причем каждого вида по 6 штук. Васе необходимо набрать ровно 96 рублей. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 11

Вариант 4. У Васи в кармане монеты достоинством 1, 2, 5, 10 рублей, причем каждого вида по 6 штук. Васе необходимо набрать ровно 93 рубля. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 14

7. Вариант 1. В тетради написаны 12 утверждений, по одному на каждой странице:
на первой странице: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 1»;
на второй: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 2»;
на третьей: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 3»;
...
на двенадцатой: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 12».
Сколько в тетради могло быть верных утверждений? Выберите все возможные варианты.

(В списке 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 требуется отметить ВСЕ возможные варианты)

Ответ. 3, 4 или 12.

Решение. Пусть в тетради n неверных утверждений. Тогда количество верных утверждений равно количеству делителей числа n. Количество неверных и верных утверждений в сумме должны давать 12, так как никаких других не бывает.

Переберем все варианты для n: будем складывать число и количество его делителей и проверять, равняется ли сумма 12.

$n = 0$. Ноль делится на все 12 натуральных чисел из нашего набора. 0+12=12. Подходит.

У чисел от 1 до 6 меньше 6 делителей, поэтому в сумме они дают число меньше 12.

$n = 7$. 2 делителя. 7+2<12.

$n = 8$. 4 делителя. 8+4=12. Подходит.

$n = 9$. 3 делителя. 9+3=12. Подходит.

$n = 10$. 4 делителя. 10+4>12.

$n = 11$. 2 делителя. 11+2>12.

$n = 12$. 6 делителей. 12+6<12.

Вариант 2. В тетради написано 21 утверждение, по одному на каждой странице:
на первой странице: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 1»;
на второй: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 2»;
на третьей: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 3»;
...
на двадцать первой: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 21».
Сколько в тетради могло быть верных утверждений? Выберите все возможные варианты.

(В списке 0 1 2 3 ... 20 21 следует отметить ВСЕ возможные варианты)

Ответ. 5 или 21

Вариант 3. В тетради написаны 14 утверждений, по одному на каждой странице:
на первой странице: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 1»;
на второй: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 2»;
на третьей: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 3»;
...
на четырнадцатой: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 14».
Сколько в тетради могло быть верных утверждений? Выберите все возможные варианты.

(В списке 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 требуется отметить ВСЕ возможные варианты)

Ответ. 4 или 14

Вариант 4. В тетради написаны 18 утверждений, по одному на каждой странице:
на первой странице: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 1»;
на второй: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 2»;
на третьей: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 3»;
...
на восемнадцатой: «Количество неверных утверждений в этой тетради делится на 18».
Сколько в тетради могло быть верных утверждений? Выберите все возможные варианты.

(В списке 0 1 2 3 .... 18 требуется отметить ВСЕ возможные варианты)

Ответ. 4, 6 или 18

8. Вариант 1. Петя перемножил десять различных целых чисел от 1 до 101. На какое наибольшее число нулей могла оканчиваться десятичная запись полученного произведения?

Ответ. 14

Решение. Посмотрим в какой степени в произведение этих десяти чисел может входить пятёрка. В наборе от 1 до 101 у нас 20 чисел кратны 5, из них четыре числа кратны $25 = 5^2$ и нет чисел, кратных 5^3. Тогда в произведении десяти чисел мы можем насобирать не более, чем 10+4=14 пятёрок и более чем на 14 нулей наше произведение оканчиваться не может. Отсюда уже несложно построить пример: $10 = 2 \cdot 5$, $25 = 5^2$, $30 = 2 \cdot 5 \cdot 3$, $40 = 2^3 \cdot 5$, $50 = 2 \cdot 5^2$, $60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$, $75 = 5^2 \cdot 3$, $80 = 2^4 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$. В произведении этих десяти чисел будет 14 пятёрок и 15 двоек, следовательно оно будет кратно 10^{14} и оканчивается на 14 нулей.

Вариант 2. Петя перемножил десять различных целых чисел от 100 до 201. На какое наибольшее число нулей могла оканчиваться десятичная запись полученного произведения?

Ответ. 15

Вариант 3. Петя перемножил десять различных целых чисел от 121 до 241. На какое наибольшее число нулей могла оканчиваться десятичная запись полученного произведения?

Ответ. 16

Вариант 4. Петя перемножил десять различных целых чисел от 521 до 671. На какое наибольшее число нулей могла оканчиваться десятичная запись полученного произведения?

Ответ. 18